

84997

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

HALKALAR VE GRUPLAR ÜZERİNDE BULANIK BAĞINTILAR

Bayram Ali ERSOY

F.B.E. Matematik Anabilim Dalında
Hazırlanan

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
T.C. YÜKSEKÖĞRETİM KURULU
DOKÜMANTASYON MERKEZİ**

Tez Danışmanı: Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

Dr. Mehmet ARIKATGİLOĞLU

AT

T. Sisman
Prof. Tahir SİSMAN

Doç. Dr. A. Göksel AĞARGÜN

İSTANBUL, 1999

İÇİNDEKİLER

TEŞEKKÜR.....	i
ÖZET.....	ii
ABSTRACT.....	iii
BÖLÜM I.....	1
BULANIK ALT GRUP.....	1
1.Bulanık Küme	1
2.Bulanık Alt Gruplar.....	1
3.Bulanık Normal Alt Grup.....	5
4.Bulanık Koset.....	8
5.Bulanık Bölüm Grubu	13
6.Bulanık Çarpım	14
BÖLÜM II	17
BULANIK İDEALLER	17
1.Bulanık İdealler.....	17
2.Bulanık Asal İdealler.....	19
3.Bulanık Maksimal	22
4.Bulanık Koset.....	23
BÖLÜM III.....	25
GRUPLAR VE HALKALAR ÜZERİNDE BULANIK BAĞINTILAR	25
1.Bulanık Bağıntılar	25
2.Kartezyen Çarpım	25
KAYNAKLAR.....	38
ÖZGEÇMİŞ.....	39

TEŞEKKÜR

Tezimi yöneten ve çalışmalarımnda maddi ve manevi yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen; her zaman yakın ilgi ve desteğini gördüğüm; hocam Sayın Doç. Dr. A. Göksel Ağargün'e, minnet ve şükranlarımı sunarım.

Ayrıca tez süresince çalışmalarımnda yardımlarını gördüğüm Sayın Öğretim Görevlisi Ayten Özkan'a teşekkür ederim.

Arş.Grv. Bayram Ali ERSOY

İstanbul 1999

ÖZET

Bu çalışma üç bölümden oluşmaktadır. Bu bölümler sırasıyla bulanık alt gruplar, bulanık idealler , gruplar ve halkalar üzerinde bulanık bağıntılardır.

Birinci bölümde bulanık küme, bulanık alt grup kavramı verildikten sonra alt gruplar bağlı olan bulanık normal alt grup, bulanık koset , bulanık çarpım tanımları verilmiştir. Kavramlarla ilgili bazı önemli teoremler verilip bunların ispatları yapılmıştır. Sonuçlar ve örnekler verilerek bu bölüm bitirilmiştir.

İkinci bölümde ise bulanık ideal, bulanık seviye ideal, bulanık asal ideal, bulanık maksimal ideal ve bulanık koset tanımı verilip bunlarla ilgili teoremler ve ispatları yapılmıştır.

Üçüncü bölümde ise bulanık bağıntı, kartezyen çarpım tanımları verilmiştir. İlk iki bölümdeki tanımlar kullanılarak bazı teoremlerin ispatlanmıştır. Sonuçlar ve örnekler verilerek bu bölüm bitirilmiştir.

ABSTRACT

This work is composed of three chapters; fuzzy subgroups, fuzzy ideals and fuzzy relations on groups and rings

In the first chapter we gave the basic definitions related to fuzzy subgroups; fuzzy subgroups, fuzzy normal subgroups, fuzzy product, fuzzy cosets. Then the theorems related to the concepts and their proofs had been given. Then basic results and examples had been made.

In the second chapter fuzzy ideals, fuzzy semi prime ideals, fuzzy prime ideals fuzzy maximal ideals and fuzzy cosets were considered. By giving the basic theorems and their proofs we had basic results and examples.

In the third chapter we gave the definitions of fuzzy relation , fuzzy cartesian product Then we studied some theorems and results of these concepts. Finally we gave some examples.

BÖLÜM I.

BULANIK ALT GRUP

1. Bulanık Küme

X evrensel bir küme olsun. Bir $A \subset X$ kümesini ele alalım. $\mu : A \rightarrow H$ bir dönüşüm olmak üzere

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & x \in A \\ 0 & x \notin A \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

Eğer değer kümesinin $[0,1]$ gerçekte aralığı olmasına izin verilirse o zaman A bir bulanık küme olarak tanımlanır. Bu durumda $\mu_A(x)$, x 'in A 'daki üyelik derecesini verir.

Bu tanımlardan kolayca şu temel bilgi ortaya çıkmaktadır: Bulanık küme kavramı esas olarak klasik küme kavramının genelleştirilmiş şeklidir. X deki bir A bulanık kümesi

$$A = \{ (x, \mu_A(x)), x \in X \}$$

sıralı ikililerin bir kümesidir.

2. Bulanık Alt Gruplar

Tanım 1.1:

S bir grupoid (yani, ikili işlem altında çarpımsal olarak kapalı bir küme) ve $\mu : S \rightarrow [0,1]$ bir dönüşüm olsun. $\forall x, y \in S$ için

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

oluyorsa μ ye bulanık alt grupoid denir.

$x_1, x_2, \dots, x_n \in S$ ise bir bulanık alt grupoid için

$$\mu(x_1 x_2 \dots x_n) \geq \min(\mu(x_i) : 1 \leq i \leq n)$$

olduğu görülür.

Tanım 1.2

G herhangi bir grup olsun. $\mu : G \rightarrow [0,1]$ dönüşümü ve $\forall x, y \in G$ için

$$1) \mu(xy) \geq (\mu(x), \mu(y))$$

$$2) \mu(x^{-1}) = \mu(x)$$

ise μ ye bir bulanık alt grup denir.

Tanım 1.3

μ , S kümesinin bir bulanık alt kümesi ise herhangi $t \in [0,1]$ için

$$A_t = \{ x \in S: \mu(x) \geq t \}$$

kümesi μ nün bir seviye alt kümesidir. Eğer μ , birimi e ile gösterilen G nin bir bulanık alt grubu ise $\mu(x) \leq \mu(e)$ olduğu kolayca görülür. Şöyle ki,

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

$y = x^{-1}$ alınırsa,

$$\mu(xx^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(x^{-1}))$$

$$\mu(e) \geq \min(\mu(x), \mu(x))$$

$$\mu(e) \geq \mu(x)$$

olur.

Teorem 1.1

μ , G nin bir bulanık alt grubu ve $t \in [0,1]$ olsun. O takdirde

$$A_t = \{ x \in G: \mu(x) \geq t \}$$

seviye alt kümesi μ nün bir seviye alt grubu adını alır.

İspat:

1) $\forall x, y \in A_t$ için $xy \in A_t$,

2) $\forall x \in A_t$ için $x^{-1} \in A_t$

olduğunu göstermemiz gerekmektedir.

$$x \in A_t \text{ ise } \mu(x) \geq t$$

dir.

$$y \in A_t \text{ ise } \mu(y) \geq t$$

dir.

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) \text{ olduğundan } \mu(xy) \geq t$$

dir.

$$\mu(xy) \geq t \text{ den } xy \in A_t \text{ olur.}$$

$$x \in A_t \text{ ise } \mu(x) \geq t$$

dir.

$$\mu(x) = \mu(x^{-1}) \text{ olduğundan } \mu(x^{-1}) \geq t$$

dir.

$$\mu(x^{-1}) \geq t \text{ den } x^{-1} \in A_t$$

dir.

Yardımcı teorem 1.1

μ sonlu bir G grubunun fuzy alt grupoidi ise o takdirde μ , bir bulanık alt gruptur.

İspat:

$x \in G$ olsun. G sonlu olduğundan x sonlu mertebeye sahiptir. x 'in mertebesi n olsun. O zaman $x^n = e$ dir. e , G nin birim elemanıdır.

$$x^n = e \Rightarrow x^{n-1} = x^{-1}$$

dir.

Bulanık alt grubu tanımını kullanarak;

$$\begin{aligned} \mu(x^{-1}) &= \mu(x^{n-1}) \\ &= \mu(x^{n-2}x) \geq \min(\mu(x^{n-2}), \mu(x)) \geq \mu(x) \end{aligned}$$

elde edilir. O takdirde

$$\mu(x^{-1}) \geq \mu(x) \quad \text{bulunur.} \quad (1)$$

$$\mu(x) = \mu(x^{n+1}) = \mu(x^{n+2}x^{-1})$$

$$\mu(x) \geq \min(\mu(x^{n+2}), \mu(x^{-1}))$$

ve $\mu(x^{n+2}) \geq \mu(x)$ olduğundan

$$\mu(x) \geq \mu(x^{-1}) \text{ dir.} \quad (2)$$

(1) ve (2) den μ bir bulanık alt gruptur.

Yardımcı teorem 1.2

μ , G grubunun bir bulanık alt grubu olsun.

$\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(y)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu(x) = \mu(e)$ olmasıdır.

İspat:

$\mu(xy) = \mu(y)$ olduğunun kabul edelim. Eğer $y=e$ alırsak $\mu(x) = \mu(e)$ dir. Karşıt olarak

$\mu(x) = \mu(e)$ olduğunu kabul edelim.

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) \text{ den}$$

$$\mu(xy) \geq \mu(y) \quad \text{dir.} \quad (3)$$

$$\mu(y) = \mu(x^{-1}xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

dir.

$$\mu(x) \geq \mu(y) \text{ den}$$

$$\mu(y) \geq \mu(xy) \quad (4)$$

dir.

(3) ve (4) den $\mu(xy) = \mu(y)$ olduğu görülür.

Yardımcı teorem 1.3:

μ , G grubunun bir bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için

$$\mu(x) < \mu(y) \Rightarrow \mu(xy) = \mu(yx) = \mu(x)$$

dir.

İspat :

$\mu(x) < \mu(y)$ olduğunu kabul edelim.

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(x)$$

$$\mu(xy) \geq \mu(x)$$

olur.

$$\mu(x) = \mu(xy y^{-1}) \geq \min(\mu(xy), \mu(y)) \text{ den } \mu(x) \geq \mu(xy) \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak

$$\mu(x) = \mu(xy)$$

dir.

$\mu(x) = \mu(yx)$ olduğu benzer şekilde gösterilebilir.

$\mu(x) < \mu(y)$ olduğundan

$$\mu(yx) \geq \min(\mu(y), \mu(x)) = \mu(x)$$

dir. Buradan

$$\mu(yx) \geq \mu(x)$$

olur.

$$\mu(x) = \mu(y^{-1}yx) \geq \min(\mu(y), \mu(yx)) \text{ den } \mu(x) \geq \mu(yx) \text{ elde edilir. Sonuç olarak}$$

$$\mu(x) = \mu(yx)$$

dir.

Örnek 1.1:

Klein 4 lü grup $G = \{ e, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = e \text{ ve } ab = ba \}$ için

$\mu : G \rightarrow [0,1]$ dönüşümü aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\mu(e) = 1, \mu(a) = \mu(b) = t \quad (0 < t < 1) \text{ ve } \mu(ab) = 1 \text{ olsun.}$$

μ, G nin bir bulanık alt grubudur. Burada $\mu(ab) = \mu(ba)$ olduğu halde $\mu(a) = \mu(b)$ olduğundan Yardımcı teoremin tersi doğru değildir.

3. Normal Alt Grup

Tanım 1.4

G bir grup ve μ, G nin bir bulanık alt grubu olsun. $\forall x, y \in G$ için $\mu(xy) = \mu(yx)$ oluyorsa μ ye G nin bulanık normal alt grubu denir. μ nün G de bir bulanık normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in G$ için

$$\mu(xy x^{-1}) = \mu(y)$$

olmasıdır.

Teorem 1.2

G' nin bir μ bulanık alt grubunun bulanık normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul, G nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olmasıdır.

İspat:

μ nün bulanık normal alt grup olduğunu kabul edelim. Bu takdirde

$$\mu(y^{-1}xy) = \mu(xy y^{-1}) = \mu(x)$$

dir.

Şimdi de μ nün G nin eşlenik sınıfları üzerine sabit olduğunu kabul ederek μ nün G nin bulanık normal alt grubu olduğunu gösterelim.

$$\mu(xy) = \mu(xyxx^{-1}) = \mu(x(yx)x^{-1}) = \mu(yx)$$

den görüldüğü gibi μ, G nin bir bulanık normal alt grubudur.

Tanım 1.5

G bir grup ve $x, y \in G$ olsun. $x^{-1}y^{-1}xy$ elemanına x ve y nin komutatörü denir ve $[x, y]$ ile gösterilir. G nin değişmeli olması halinde $[x, y] = e$ olduğu açıktır. H ve K, G grubunun iki alt grubu ise $[H, K]$ alt grubu

$$\{[x, y] : x \in H, y \in K\}$$

elemanları ile üretilen bir gruptur.

Teorem 1.3

μ , G grubunun bir bulanık alt grubu olsun. μ nün bulanık normal olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu([x, y]) = \mu(e)$$

olmasıdır.

İspat :

μ nün bulanık normal olması için gerek ve yeter koşul μ nün G nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olmasıdır. Böylece μ bulanık normal ise $\forall x, y \in G$ için

$$\mu(x^{-1}y^{-1}x) = \mu(y^{-1})$$

elde edilir.

$$\mu(x^{-1}y^{-1}xyy^{-1}) = \mu(y^{-1})$$

$$\mu([x, y]y^{-1}) = \mu(y^{-1}) \Rightarrow \mu([x, y]) = \mu(e)$$

dır.

Şimdi ise $\mu([x, y]) = \mu(e)$ olması halinde μ nün bulanık normal alt grup olduğunu gösterelim.

$$\mu([x, y]) = \mu(e)$$

$$\mu(x^{-1}y^{-1}xy) = \mu(e)$$

olduğundan $\mu(xy) = \mu(yx)$ olup μ , bir bulanık normal alt gruptur.

Teorem 1.4

μ , G nin bir bulanık alt grubu olsun. μ nün bir bulanık normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu([x, y]) \geq \mu(x) \quad (5)$$

olmasıdır.

İspat:

μ , G nin bir bulanık normal alt grubu ve $x, y \in G$ olsun.

$$\mu([x, y]) = \mu(x^{-1}y^{-1}xy) \geq \min(\mu(y^{-1}xy), \mu(x^{-1}))$$

$$= \min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(x)$$

$$\mu([x, y]) \geq \mu(x) \text{ dir.}$$

Karşıt olarak; μ nün (5) bağıntısını sağladığını kabul edelim.

$\forall x, z \in G$ için $\mu(x^{-1}zx) = \mu(zx^{-1}x^{-1}zx)$ olduğundan

$$\mu(x^{-1}zx) \geq \min(\mu(z), \mu([z, x]) = \mu(z)$$

dir.

Böylece

$$\mu(x^{-1}zx) \geq \mu(z) \quad (6)$$

elde edilir.

$$\mu(z) = \mu(xx^{-1}zxx^{-1}) \geq \min(\mu(x), \mu(x^{-1}zx)) \quad (7)$$

Eğer $\min(\mu(x), \mu(x^{-1}zx)) = \mu(x)$ ise

$$\mu(z) \geq \mu(x) \quad (1^*)$$

dir.

Eğer $\min(\mu(x), \mu(x^{-1}zx)) = \mu(x^{-1}zx)$ ise

$$\mu(z) \geq \mu(x^{-1}zx) \quad (2^*)$$

dir.

(2^{*}) ve (6) dan

$$\mu(z) = \mu(x^{-1}zx)$$

olur. Buradan μ , bir bulanık normal alt gruptur.

Teorem 1.5

μ , G grubunun bir bulanık normal alt grubu ve $t \leq \mu(e)$ olacak şekilde $t \in [0,1]$

olsun.

$A_t = \{x \in G : \mu(x) \geq t\}$ kümesi G bir normal alt grubudur.

İspat:

A_t nin G nin bir alt grubu olduğu daha önce ispatlandı. A_t nin normal alt grup

olduğunu göstereceğiz.

$\forall u \in G$ ve $\forall x \in A_t$ için $u^{-1}xu \in A_t$ olduğunu gösterelim. μ bir bulanık normal alt grup

olduğundan

$$\mu(u^{-1}xu) = \mu(x) \text{ dir.}$$

$$\mu(u^{-1}xu) = \mu(x) \geq t \Rightarrow \mu(u^{-1}xu) \geq t \text{ den}$$

$$u^{-1}xu \in A_t \text{ dir.}$$

Bundan dolayı $A_t \triangleleft G$ dir.

Tanım 1.6

μ , sonlu G grubunun bir bulanık alt grubu olsun. μ nün mertebesi $o(\mu)$

$$\text{ile gösterilir ve } o(\mu) = \frac{o(G)}{r}$$

dir. (r, μ nün indeksidir.)

4. Bulanık Koset

Tanım 1.7

μ , G grubu üzerinde bir bulanık alt grup ve $\mu_x : G \rightarrow [0,1]$ bir dönüşüm olsun

$$\forall x \in G \text{ için}$$

$$\mu_x(g) = \mu(gx^{-1})$$

oluyorsa μ_x 'e μ nün bulanık koseti denir.

Yukarıdaki tanım doğal olarak grubun koset tanımına genişletilebilir. Bu aşağıdaki gibi görülür.

μ , G nin H alt grubunun karakteristik fonksiyonu olsun. Yani

$$H = \{x \in G : \mu(x) = 1\} \text{ ve } G/H = \{x \in G : \mu(x) = 0\}$$

dır.

Herhangi $x \in G$ için $Gx = G$ dir.

$$g \in H \text{ ise } \mu_x(gx) = \mu(gxx^{-1}) = \mu(g) = 1$$

dir.

$$g \notin H \text{ ise } \mu_x(gx) = \mu(g) = 0 \text{ olur.}$$

Buradan μ_x 'in G üzerinde karakteristik fonksiyon olduğu anlaşılır.

Teorem 1.6

μ , G grubunun bulanık normal alt grubu ve $G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$ olsun. O takdirde G_μ , G nin normal alt grubudur.

İspat:

$\forall n \in G_\mu$ ve $\forall x \in G$ için $xnx^{-1} \in G_\mu$ olduğu gösterilmelidir.

$n \in G_\mu$ ise $\mu(n) = \mu(e)$ dir.

$\mu(n) = \mu(e)$ olduğundan $\mu(xn) = \mu(x)$ olur. $\mu(xn) = \mu(x) \Rightarrow \mu(xnx^{-1}) = \mu(e)$ den $xnx^{-1} \in G_\mu$ olur. Sonuç olarak,

$$G_\mu \triangleleft G$$

dir.

Tanım 1.8

μ , sonlu bir G grubunun bir bulanık alt grubu ve F, μ nün bulanık kosetlerinin kümesi olsun. O takdirde F in kardinalitesi μ nün indeksidir.

Tanım 1.9

μ , sonlu bir G grubunun bir bulanık alt grubu ve $G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$ olsun.

G_μ , G nin bir abelyan alt grubu ise μ bulanık abelyandır.

Teorem 1.7

p bir asal tamsayı olmak üzere, p^2 mertebeli bir bulanık alt grup, bulanık abelyandır.

İspat:

$o(\mu) = p^2$ olacak şekilde μ , G grubunun bir bulanık alt grubu olsun.

$$G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$$

kümesini ele alalım. G_μ ' nün G 'nin bir normal alt grubu olduğunu daha önceden biliyoruz.

$o(\mu) = o(G_\mu)$ dir.

p^2 mertebeli bir grubun abelyan olduğu grup teoriden bilinir. Böylece G_μ abelyandır ve sonuç olarak μ bulanık abelyandır.

Teorem 1.8

μ , G grubunun bir bulanık normal alt grubu olsun. $G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$

kümesi G 'nin bir normal alt grubudur.

$\mu : G/G_\mu \rightarrow [0,1]$, $\mu(G_\mu x) = \mu(x)$ olarak tanımlanıyorsa μ dönüşümü iyi tanımlıdır ve

$\mu, G/G_\mu$ nün bir bulanık normal alt grubudur.

Diğer taraftan $N < G$ ve $g \in N$ olduğunda $\mu_1(Ng) = \mu_1(N)$ olacak şekilde G/N in bir bulanık normal alt grubu μ_1 ise, o takdirde μ, G nin bir bulanık normal alt grubudur.

$$G_\mu = N \quad \text{ve} \quad \mu = \mu_1$$

dir.

İspat :

İlk olarak μ nün iyi tanımlı olduğunu gösterelim. $x, y \in G$ için $G_\mu x = G_\mu y$ ise

$xy^{-1} \in G_\mu$ dır. G_μ nün tanımından $\mu(xy^{-1}) = \mu(e)$ olur. Bu yüzden $\mu(x) = \mu(y)$ dir.

$$\mu(x) = \mu(y) \Rightarrow \mu(G_\mu x) = \mu(G_\mu y)$$

olur. Böylece μ nin iyi tanımlı olduğu ispatlanmış olur. μ nin G/G_μ nun bir bulanık alt grup olduğunu gösterelim.

$$\text{a) } \mu(G_\mu x G_\mu y) = \mu(G_\mu xy) = \mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

$$\mu(G_\mu xy) \geq \min(\mu(G_\mu x), \mu(G_\mu y))$$

$$\text{b) } \mu(G_\mu x) = \mu(x) = \mu(x^{-1}) = \mu(G_\mu x^{-1}) \quad (\mu \text{ bulanık alt grup})$$

Buradan görüldüğü gibi, $\mu, G/G_\mu$ nün bir bulanık alt grubudur.

Şimdi μ nin bulanık normal olduğunu gösterelim.

$$\mu(G_\mu x G_\mu y) = \mu(G_\mu xy) = \mu(xy) = \mu(yx) = \mu(G_\mu y G_\mu x) \quad (\mu \text{ bulanık normal})$$

Bundan dolayı μ bulanık normaldir.

Karşıt olarak; G/N üzerinde μ_1 bulanık normal alt grubu verildiğinde

$\mu(x) = \mu_1(Nx)$ ile $\mu : G \rightarrow [0,1]$ fonksiyonu tanımlansın. μ iyi tanımlıdır ve μ, G nin bir bulanık alt grubudur.

μ nun bulanık normal olduğunu gösterelim. $\forall x, y \in G$ için

$$\begin{aligned}
\mu(y^{-1}xy) &= \mu_1(Ny^{-1}xy) \\
&= \mu_1(Ny^{-1}NxNy) \\
&= \mu_1(Nx) \quad (\mu_1 \text{ fuzzy normal}) \\
&= \mu(x)
\end{aligned}$$

Buradan μ nün G nin eşlenik sınıfları üzerinde sabit olduğu görülür. Böylece μ bulanık normal alt gruptur. Ayrıca $n \in N$ ise

$$\mu(n) = \mu_1(Nn) = \mu_1(N) = \mu(e) \quad N \subseteq G_\mu \quad *$$

dır.

$x \in G_\mu$ ise

$$\mu(x) = \mu(e) \Rightarrow \mu_1(Nx) = \mu_1(N)$$

dır.

Sonuç olarak, $Nx=N$ ve $x \in N$ olur.

$$G_\mu \subseteq N \quad **$$

* ve ** den $G_\mu = N$ dir

Teorem 1.9

μ, G grubunun bir bulanık normal alt grubu ise herhangi $x, y \in G$ için

$$\mu_x(xg) = \mu_x(gx) = \mu(g)$$

dir.

İspat:

$$\mu_x(xg) = \mu_x(xgx^{-1}x) = \mu(xgx^{-1}) = \mu(g) \text{ dir.}$$

$$\mu_x(gx) = \mu_x(xx^{-1}gx) = \mu(xx^{-1}g) = \mu(g) \text{ olduğundan} \quad \mu_x(xg) = \mu_x(gx) = \mu(g)$$

bulunur.

Uyarı:

Yukarıdaki teorem grup teorideki $N < G$ ise $\forall x \in G$ için $Nx=xN$ olduğu sonucuna benzerdir.

Teorem 1.10

μ, G grubunun bir bulanık normal alt grubu olsun. F , μ nün tüm bulanık kosetlerinin kümesi,

$$\mu_x \circ \mu_y = \mu_{xy} \quad (10)$$

işlemine göre bir grup teşkil eder.

$\forall x \in G$ için $\bar{\mu} : F \rightarrow [0,1]$ dönüşümü

$$\bar{\mu}(\mu_x) = \mu(x) \quad (11)$$

olarak tanımlansın. $\bar{\mu}$ dönüşümü F üzerinde bir bulanık alt gruptur.

İspat:

İlk olarak (10) ile verilen işlemin iyi tanımlı olduğunu gösterelim

$$\mu_x = \mu_y \quad \text{ve} \quad \mu_{x_0} = \mu_{y_0} \quad (12)$$

olacak şekilde $x, y, x_0, y_0 \in G$ olsun. Bir başka ifade ile

$\mu_x \circ \mu_{x_0} = \mu_y \circ \mu_{y_0}$ olduğunu göstermeliyiz. Yani $\mu_{xx_0} = \mu_{yy_0}$ dır.

Tanımı kullanarak, $\forall g \in G$ için

$$\mu_{xx_0}(g) = \mu(gx_0^{-1}x^{-1}) \quad \text{ve} \quad \mu_{yy_0}(g) = \mu(gy_0^{-1}y^{-1})$$

elde edilir.

$$\begin{aligned} \mu(gx_0^{-1}x^{-1}) &= \mu(gy_0^{-1}y_0y_0^{-1}x^{-1}) \\ &= \mu(gy_0^{-1}y_0^{-1}y^{-1}yx_0^{-1}x^{-1}) \\ &\geq \min(\mu(gy_0^{-1}y^{-1}), \mu(y_0yx_0^{-1}x^{-1})) \quad \text{olur.} \end{aligned} \quad (13)$$

(12) i kullanarak

$$\mu(gx^{-1}) = \mu(gy^{-1}) \quad (14)$$

ve

$$\mu(gx_0^{-1}) = \mu(gy_0^{-1}) \quad (15)$$

elde edilir. (14) de g yerine $x_0y_0y^{-1}$, (15) de g yerine y_0 yazarsak

$$\begin{aligned} \mu(y_0yx_0^{-1}x^{-1}) &= \mu(y_0yx^{-1}y_0^{-1}) \\ &= \mu(yx^{-1}) \\ &= \mu(e) \quad \text{olur ve buradan} \end{aligned}$$

$$\mu(gx_0^{-1}x^{-1}) \geq \mu(gy_0^{-1}y^{-1}) \quad \text{elde edilir.}$$

Benzer şekilde

$$\mu(gy_0^{-1}y^{-1}) \geq \mu(gx_0^{-1}x^{-1})$$

elde edilir.

$$\mu(gx_0^{-1}x^{-1}) = \mu(gy_0^{-1}y^{-1}) \quad \text{olur.}$$

Dolayısıyla $\mu_{xx_0} = \mu_{yy_0}$ dır.

(10) da tanımlı işlemin birleşmeli olduğu açıktır. μ_e de F nin birim elemanıdır.

μ_x ' in tersi $\mu_{x^{-1}}$ dir. Bundan dolayı F bir gruptur.

$$\bar{\mu}(\mu_x \circ \mu_y) = \bar{\mu}(\mu_{xy}) = \mu(xy)$$

$$\geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

$$= \min(\bar{\mu}(\mu_x), \bar{\mu}(\mu_y))$$

$\bar{\mu}(\mu_x) = \bar{\mu}(\mu_{x^{-1}}) = \mu(x) = \mu(x^{-1})$ olduğundan $\bar{\mu}$ bir bulanık alt gruptur.

5.Bulanık Bölüm Grubu

Tanım 1.10

μ , G grubunun bir bulanık normal alt grubu olsun. (11) de tanımlanan $\bar{\mu}$ dönüşümüne μ ile tanımlı bulanık bölüm grubu denir.

Sonuç 1.1

$\theta : G \rightarrow F$ dönüşümünü

$$\theta(x) = \mu_x \quad (16)$$

olarak tanımlayalım. θ ,

$$G_\mu = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$$

çekirdekli bir homomorfizmadır. (e , G nin birim elemanıdır.)

İspat:

$\forall x, y \in G$ için

$\theta(xy) = \mu_{xy} = \mu_x \circ \mu_y = \theta(x)\theta(y)$ olduğundan θ bir homomorfizmadır.

Teorem 1.11

μ , G grubunun bir bulanık normal alt grubu ve F, μ nün tüm bulanık kosetlerinin koleksiyonu olsun. F nin her bulanık (normal) alt grubu G nin bir bulanık (normal) alt grubuna karşılık gelir.

İspat:

μ^*, F nin bir bulanık (normal) alt grubu olsun.

$$v : G \rightarrow [0,1] \text{ dönüşümü } v(x) = \mu^*(\mu_x) \quad \forall x \in G \quad (17)$$

olarak tanımlansın. μ_x in iyi tanımlı olduğunu biliyoruz. v nin bir bulanık alt grup olduğunu gösterelim.

$\forall x, y \in G$ için

$$v(xy) = \mu^*(\mu_{xy}) = \mu^*(\mu_x \mu_y)$$

$$\geq \min(\mu^*(\mu_x), \mu^*(\mu_y))$$

$$= \min(v(x), v(y)) \text{ dir. Dolayısıyla } v(xy) \geq \min(v(x), v(y)) \quad *$$

$$v(x) = \mu^*(\mu_x) = \mu^*(\mu_{x^{-1}}) = v(x^{-1}) \text{ dir.} \quad **$$

* ve ** den v bir bulanık alt gruptur.

μ^* bulanık normal ise

$$v(xy) = \mu^*(\mu_{xy}) = \mu^*(\mu_x \circ \mu_y)$$

$$= \mu^*(\mu_y \circ \mu_x)$$

$$= \mu^*(\mu_{yx})$$

$$= v(xy)$$

dir. v bulanık normaldir.

6. Bulanık Çarpım

G herhangi bir grup μ ve ν , G nin iki bulanık alt grubu ise $\mu\nu$ çarpımı aşağıdaki gibi tanımlanır.

$\forall x \in G$ için

$$\mu\nu(x) = \sup_{x=x_1x_2} [\min(\mu(x_1), \mu(x_2))] \text{ dir.}$$

Önerme 1.1

μ, ν, τ G nin bulanık alt grupları olsun. O takdirde

$$(\mu\nu)\tau(x) = \sup_{x=x_1x_2x_3} [\min(\mu(x_1), \mu(x_2), \mu(x_3))]$$

$$= \mu(\nu, \tau)(x)$$

μ ve ν , G nin bulanık alt grupları ise $\mu\nu$ nin G bir bulanık alt grubu olması gerekmez.

Örnek 1.1

$G = S_3$ simetrik grubu olsun. $o(G) = 3! = 6$ dir. Bu elemanlar

$$e = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad a = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \quad a^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

$$a^2b = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad ab = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.

$S_3 = \{e, a, a^2, b, ab, a^2b\}$ olur. Burada $b^2 = e$ ve $a^3 = e$ dir. $H = \{e, b\}$, $K = \{e, ab\}$ olsun. H ve K , G nin alt gruplarıdır. μ ve ν sırasıyla H ve K nin alt kümeleriyle gösterilen karakteristik fonksiyon olsunlar. μ ve ν , G nin bulanık alt gruplarıdır.

$$\mu\nu(x) = \min(\mu(x_1), \mu(x_2)) \quad x = x_1x_2 \quad x_1, x_2 \in G$$

$$\begin{aligned} \mu\nu(a^2b) &= \min(\mu(a^2), \mu(b)) \\ &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu\nu(a^2) &= \mu\nu(b(ab)) = \min(\mu(b), \nu(ab)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mu\nu(b) &= \mu\nu(be) = \min(\mu(b), \nu(e)) \\ &= 1 \end{aligned}$$

$\mu\nu(a^2b) < \min(\mu\nu(a^2), \mu\nu(b))$ olduğundan $\mu\nu$, S_3 nin bir bulanık alt grubu değildir.

Ana Sonuçlar:

1) μ ve ν , G nin bulanık alt grupları ise $\mu\nu$ nin bulanık normal alt grup olması için gerek ve yeter koşul $\mu\nu = \nu\mu$ olmasıdır

2) μ , G nin bulanık normal alt grubu ve ν , G nin herhangi bulanık alt grubu ise $\mu\nu$, G nin bulanık alt grubudur.

Önerme 1.2

μ , ν , G nin bulanık normal alt grupları ise o takdirde $\mu\nu$, G nin bir bulanık normal alt grubudur.

İspat:

$\mu\nu$ bir bulanık alt grubudur. $\mu\nu$ nin bulanık normal olduğunu göstermek yeterlidir.

$\forall x \in G$ için

$$\begin{aligned}
 \mu\nu(x) &= \sup_{x=x_1x_2} [\min \mu(x_1), \nu(x_2)] \\
 &= \sup_{x=x_1x_2} [\min \mu(y^{-1}x_1y), \nu(y^{-1}x_2y)] \quad \forall y \in G \\
 &= \sup_{y^{-1}xy=(y^{-1}x_1y)(y^{-1}x_2y)} [\min \mu(y^{-1}x_1y), \nu(y^{-1}x_2y)] \quad \forall y \in G \\
 &= \mu\nu(y^{-1}xy)
 \end{aligned}$$

$\mu\nu$, G nin bir bulanık normal alt grubudur.



BÖLÜM II

BULANIK İDEALLER

1. Bulanık İdealler

Tanım 2.1:

μ , G nin bir bulanık alt kümesi olsun. Eğer $\forall x, y \in R$ için

$$1) \mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

$$2) \mu(xy) \geq \mu(x) \text{ } (\mu(xy) \geq \mu(y))$$

şartları sağlanıyorsa μ ' ye G ' nin bir bulanık sol(sağ) ideali denir.

μ ' nün G ' nin bir bulanık ideal olması için gerek ve yeter koşul μ ' nün hem sol hem de sağ bulanık ideal olmasıdır.

Önerme 2.1

μ ' nün G ' nin bir bulanık ideali olması için;

$$1) \mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

$$2) \mu(xy) \geq \max(\mu(x), \mu(y))$$

şartlarını sağlaması yeterlidir.

İspat

Bu, yukarıdaki tanımın bir sonucudur.

Tanım 2.2

μ , G nin bir bulanık ideali olsun. $t \in [0,1]$ ve $\mu(0) \geq t$ için μ_t ideali μ ' nün seviye ideali olarak adlandırılır.

Teorem 2.1

μ , G nin bir bulanık alt kümesi olsun.

1) Eğer μ , G nin bir bulanık sol(sağ) ideali ise o zaman $\forall x \in G$ için

$$\mu(0) \geq \mu(x)$$

ve bütün $t \in [0, \mu(0)]$ için μ_t , G nin bir sol(sağ) idealidir.

2) Eğer bütün $t \in \text{Im}(\mu)$ için μ_t , G nin bir sol(sağ) ideali ise o zaman μ , G nin bir bulanık sol(sağ) idealidir.

İspat

1) μ , G nin bir sol(sağ) ideali olduğu için

$$\mu(x - x) \geq \min(\mu(x), \mu(x))$$

$$\mu(0) \geq \min(\mu(x))$$

olur.

μ_t , G nin bir sol(sağ) ideal olması için ispatlamamız gereken $\forall x, y \in \mu_t$ için $x - y \in \mu_t$ ve $gx \in \mu_t$ olmasıdır.

Eğer $x, y \in \mu_t$ ise

$\mu(x) \geq t$ ve $\mu(y) \geq t$ dir. μ , G nin bir bulanık sol(sağ) ideali olduğu için

$$\mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

olur.

$\mu(x) \geq \mu(y)$ olsun. O zaman

$$\mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(y)$$

$$\mu(y) \geq t \text{ olduğundan}$$

$$\mu(x - y) \geq t \text{ olur ve buradan } x - y \in \mu_t \text{ olur.}$$

2) Eğer μ_t bir sol(sağ) ideal ise $\forall x, y \in \mu_t$ için $x - y \in \mu_t$ dir.

Bizim göstermemiz gereken

$$\mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$$

$$\mu(xy) \geq \mu(y)$$

olduğudur.

$\min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(x) = t$ olsun. O zaman $x \in \mu_t$ ve $\mu(y) \geq \mu(x)$ olduğundan

$\mu(y) \geq t$ olur ve buradan $y \in \mu_t$ olur.

Şimdi $\mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$ olup olmadığına bakalım.

$$\mu(x - y) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) = \mu(x) = t$$

ve $x - y \in \mu_t$ olduğundan $\mu(x - y) \geq t$ dir. Bu yüzden yukarıda elde ettiğimiz sonuç doğrudur.

$\mu(xy) \geq \mu(y)$ olup olmadığına bakalım.

$x \notin \mu_t$ ve $\mu(y) = t$ için $y \in \mu_t$ dir ve $xy \in \mu_t$ olduğundan

$$\mu(xy) \geq t = \mu(y)$$

olup ispat tamamlanmış olur.

Teorem 2.2

μ , R nin bulanık ideali olsun. μ' nün μ_t ve μ_s gibi iki seviye idealinin eşit olması için gerek ve yeter koşul $s \leq \mu(x) \leq t$ şartını sağlayan bir $x \in R$ bulunamamasıdır.

İspat:

$\mu_t = \mu_s$ olsun.

$s \leq \mu(x) \leq t$ şartını sağlayan $x \in R$ bulunsun. O zaman $\mu_t \not\subseteq \mu_s$ olur. Çünkü x , μ_s nin elemanıdır fakat μ_t nin elemanı değildir. Bu da baştaki kabulümüzle çelişir.

Tersine,

$s \leq \mu(x) \leq t$ şartını sağlayan $x \in R$ bulunmasın. $s \leq t$ olduğu için $\mu_t \subseteq \mu_s$ dir. $x \in \mu_s$ olsun. O zaman $\mu(x) \geq s$ olur ve $\mu(x)$ s ile t arasında bir değer almadığından $\mu(x) \geq t$ olur. Bunun sonucu olarak $x \in \mu_t$ olur. Böylece $\mu_s \subseteq \mu_t$ dir. Sonuç olarak

$$\mu_t = \mu_s$$

olur. Bununla ispat tamamlanmış olur.

Bulanık Asal İdealler**Tanım 2.3**

P , R nin bir ideali olsun. $\forall a, b \in R$ için

$$ab \in P \Rightarrow a \in P \text{ veya } b \in P$$

oluyorsa P' ye asal ideal denir.

Tanım 2.4

μ , G nin bulanık ideali olsun $\forall x \in R, \forall n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\mu(x^n) = \mu(x)$$

oluyorsa μ' ye yarı asal denir.

Tanım 2.5

μ bulanık sol idealinin bulanık asal olarak adlandırılması için gerek ve yeter koşul σ ve θ bulanık sol idealleri için

$$\sigma \theta \subseteq \mu \Rightarrow \sigma \subseteq \mu \text{ veya } \theta \subseteq \mu$$

olmasıdır.

Tanım 2.6

μ, R' nin bulanık ideali olsun.

$\forall a, b \in G$ için $\mu(ab) = \mu(a)$ veya $\mu(ab) = \mu(b)$ oluyorsa μ' ye bir bulanık asal ideal denir.

Tanım 2.7

μ, R' nin bulanık ideali olsun.

Eğer $\forall a, b \in R$ için $\mu(ab) \leq \mu(a^n)$

$\mu(ab) \leq \mu(b^m)$ olacak şekilde bazı $n, m \in \mathbb{Z}^+$

bulunabiliyorsa μ' ye yarı asallanabilir denir.

Teorem 2.3

Eğer A, R nin herhangi bir yarı asallanabilir bir ideali, $A \neq R$ olsun. O zaman R nin bir yarı asallanabilir μ bulanık ideali aşağıdaki şekilde tanımlanır;

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha & x \in A \text{ ise} \\ \beta & x \in R \setminus A \text{ ise} \end{cases} \text{ burada } \alpha, \beta \in [0,1], \alpha > \beta.$$

İspat

$\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $ab \in R$ ve $\mu(ab) > \mu(a^n)$, olsun. O zaman

$\mu(a^n) \neq \alpha$, ve bu yüzden $\mu(a^n) = \beta$ ve $\mu(ab) = \alpha$.

dır.

Dolayısıyla, $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ için $a^n \notin A$, ve $ab \in A$ ve bundan dolayı bazı $m \in \mathbb{Z}_+$ için $b^m \in A$ dır. Çünkü A yarı asallanabilirdir. Sonuçta $\mu(b^m) = \alpha$, ile μ nün yarı asallanabilir olduğunu göstermiş oluruz.

Teorem 2.4

μ, R nin bir bulanık ideali olsun. μ' nün bulanık asal olması için gerek ve yeter koşul $t \in \text{Im}(\mu)$ için μ_t seviye ideallerinin bir asal ideal olmasıdır.

İspat:

μ, R nin bir bulanık asal ideal olsun. O zaman

$\forall a, b \in R$ için $\mu(ab) = \mu(a)$ veya $\mu(ab) = \mu(b)$

dır.

Göstermemiz gereken

$\forall a, b \in \mu_i$ için $ab \in \mu_i \Rightarrow a \in \mu_i$ veya $b \in \mu_i$

olduğudur.

$\mu(ab) \geq t$ olsun. O zaman $ab \in \mu_i$ olur. Buradan

$\mu(a) = \mu(ab) \geq t$ olduğundan $a \in \mu_i$ olur. *

$\mu(a) \neq \mu(ab)$ olsun O zaman $\mu(b) = \mu(ab)$ olur. Buradan,

$\mu(b) = \mu(ab) \geq t$ olduğundan $b \in \mu_i$ olur. **

* ve ** den μ_i 'nin asal olduğu gösterilmiş olur.

Tersine,

$t \in \text{Im}(\mu)$ için μ_i seviye idealleri R 'nin bir asal ideali olsun. Yani

$ab \in \mu_i \Rightarrow a \in \mu_i$ veya $b \in \mu_i$

dır.

Göstermemiz gereken

$\forall a, b \in R$ için $\mu(ab) = \mu(a)$ veya $\mu(ab) = \mu(b)$

olduğudur.

$\mu(ab) = t$ olsun. O zaman $ab \in \mu_i$ olur ve μ_i asal ideal olduğu için

$a \in \mu_i$ veya $b \in \mu_i$ olur.

$a \in \mu_i$ olsun. O zaman $\mu(a) \geq t$ olur . μ bulanık ideal (yani $\mu(ab) \geq \max(\mu(a), \mu(b))$) ve

$\mu(a) \geq t = \mu(ab)$

olduğundan $\mu(ab) = \mu(a)$ sonucunu elde ederiz.

$a \notin \mu_i$ olsun. O zaman $b \in \mu_i$ olur. Buradan $\mu(b) \geq t$ olur . μ bulanık ideal ve

$\mu(b) \geq t = \mu(ab)$

olduğundan $\mu(ab) = \mu(b)$ sonucunu elde ederiz. Bu şekilde istenen elde edilmiş olur.

Teorem 2.5

$\mu_1 \subseteq \mu_2 \subseteq \mu_3 \subseteq \dots \subseteq \mu_n \subseteq \dots$ olmak üzere

$\{\mu_n \mid n \in \mathbb{Z}_+\}$ R 'nin bulanık asal ideallerinin bir kümesi ise o zaman $\bigcup \mu_n$ ve $\bigcap \mu_n$, R 'nin bulanık asal idealleridir.

İspat:

$a, b \in R$ olsun. $\forall i, j \in \mathbb{Z}_+$ için

$\mu_i(a), \mu_j(b) \leq \mu_k(a), \mu_k(b)$

olacak şekilde $k \in Z$ vardır ve bu yüzden

$$\min(\mu_i(a), \mu_j(b)) \leq \mu_k(a-b)$$

dır.

$\mu = \bigcup \mu_n$ olsun. Şimdi

$$\begin{aligned} \min(\mu(a), \mu(b)) &= \min(\sup(\mu_n(a), \sup \mu_n(b))) \\ &= \sup(\min(\mu_i(a), \mu_j(b))) \\ &\leq \sup(\mu_k(a-b) = \mu(a-b)) \end{aligned}$$

dır. Aynı zamanda $\forall i \in Z^+$ için

$$\begin{aligned} \mu(ab) &= \sup(\mu_n(ab)) \\ &\geq \mu_i(ab) \\ &\geq \mu_i(a), \mu_i(b) \end{aligned}$$

olur ve

$$\begin{aligned} \mu(ab) &\geq (\bigcup \mu_i)(a), (\bigcup \mu_i)(b), \text{ yani} \\ \mu(ab) &\geq \mu(a), \mu(b) \end{aligned}$$

dır.

Bu yüzden μ , R nin bir bulanık idealidir.

Sonra μ nün bulanık asal olduğunu göstereceğiz. $\alpha = \mu(ab)$ ve $\beta = \max(\mu(a), \mu(b))$ olsun. $\alpha \geq \beta$ olduğu aşıkardır.

$\varepsilon > 0$ verilsin. O zaman

$$\alpha - \beta < \sup \mu_n(ab),$$

olacak şekilde $j \in Z_+$ vardır öyleki

$$\begin{aligned} \alpha - \beta &< \mu_j(ab), \\ &= \max(\mu_j(a), \mu_j(b)) \\ &\leq \max(\mu(a), \mu(b)) \\ &= \beta \end{aligned}$$

dır. Buradan $\alpha \leq \beta$ ve sonuç olarak $\alpha = \beta$ olur.

İspatın geri kalan kısmı açıktır.

3.Bulanık Maksimal

Tanım 2.8

μ nün bulanık ideal olsun.

- i) $\mu(a) < \mu(0) \quad \exists a \in S$ (S, R deki tersi olan elemanlardan oluşan bir küme)
 ii) Eğer $\exists b \in S$ için $\mu(b) < \mu(0)$ ise $\exists c \in S, r \in R$ için $\mu(c - rb) = \mu(0)$
 şartlarını sağlanıyorsa μ ' ye maksimal ideal denir.

Teorem 2.6

Eğer μ, R nin bir bulanık maksimal ideali ise o zaman $t = \mu(0)$ için μ_t maksimal ve $\text{card Im } \mu = 2$ dir.

İspat

Bulanık maksimal ideal tanımındaki (i) den $\mu_t \subset R$ dir. $b \in R \setminus \mu_t$ olsun. O zaman

$\mu(b) < \mu(0)$ olur. $\exists c \in S, r \in R$ için $\mu(c - rb) = \mu(0)$ olduğundan

$$c - rb \in \mu_t \quad \text{ve} \quad c \in \mu_t + \langle b \rangle$$

dir.

Buradan $\mu_t + \langle b \rangle = R$ elde edilir. Buna göre μ_t maksimal' dir.

$\alpha \in \text{Im } \mu$ ve $\alpha < \mu(0) = t$ olsun. O zaman $\mu_t \subset \mu_\alpha$ dır ve dolayısıyla $\mu_\alpha = R$ dir.

Bu nedenle $F_\mu = \{\mu_t, R\}$ olur. Buradan $\text{card Im } \mu = 2$ elde edilir.

Eğer μ, R nin herhangi bir bulanık ideali ise aşağıdaki diyagram [6]' dan elde edilir

μ bir fuzzy maximaldir.

$\Downarrow$

μ bir fuzzy asaldir. $\Rightarrow$ μ bir fuzzy asallanabilirdir.

$\Downarrow$

$\Downarrow$

μ bir fuzzy yari asaldir. μ bir fuzzy yari asalanabilirdir.

4.Bulanık Koset

Tanım 2.9

μ, R nin bir bulanık ideali olsun. $\forall r \in R$ için

$$\mu_x^*(r) = \mu(r - x)$$

ifadesindeki μ_x^* bulanık alt kümesi μ ve r ile tanımlanan R nin bir bulanık koseti adını alır.

Aşağıdaki özellikler gösterilebilir.

$\forall x, y \in R$ için $\mu_x^* + \mu_y^* = \mu_{x+y}^*$ ve $\mu_x^* \cdot \mu_y^* = \mu_{xy}^*$ dır.

μ_x^* iyi tanımlıdır ve R^* μ nün R ' de bu işlemler altında μ_e^* birim eleman olmak üzere değişmeli halka oluşturur. $\mu_0^* = \mu$ R^* ' nin toplamsal etkisiz elemandır. μ_{-x}^* , μ_x^* in toplamsal ters elemanıdır. Açıkça görülüyor ki μ , R nin herhangi bir sabit bulanık alt küme ise

$$R^* = \langle \mu_0^* \rangle$$

dır.

Yardımcı teorem 2.1

μ , R nin bir bulanık ideali olsun. $\forall x \in R$ için $\mu(x) = \mu(0)$ olması için gerek ve yeter koşul $\mu_x^* = \mu_0^*$ olmasıdır.

İspat:

$\forall r \in R$ için $\mu(r) \leq \mu(x) = \mu(0)$ olacak şekilde $\mu(x) = 0$ olsun.

Eğer $\mu(r) < \mu(x)$ ise o zaman

$$\mu(r - x) = \mu(r)$$

olur. Eğer $\mu(r) = \mu(x)$ ise o zaman $t = \mu(0)$ olduğu yerde

$$r, x \in \mu_t$$

dır. Bunun sonucunda

$$\mu(r - x) = \mu(0) = \mu(r) \text{ olduğu [6] da yardımcı teorem 6.2 den görülür.}$$

Böylece $\forall x \in R$ için

$$\mu(r - x) = \mu(r)$$

elde edilir.. Sonuç olarak

$$\mu_x^* = \mu_0^*$$

dır.

İspatın diğer kısmı açıktır.

BÖLÜM III

GRUPLAR VE HALKALAR ÜZERİNDE BULANIK BAĞINTILAR

1. Bulanık Bağıntılar

Tanım 3.1

S üzerindeki bir μ bulanık bağıntısı $S \times S$ nin bir bulanık alt kümesidir.

Tanım 3.2

μ, S üzerinde bir bulanık bağıntısı ve $\sigma; S$ nin bulanık alt kümesi olsun.

$$\forall x, y \in S \text{ için } \mu(x, y) \leq \min(\sigma(x), \sigma(y))$$

oluyorsa μ ye σ üzerinde bir bulanık bağıntı denir.

2. Kartezyen Çarpım

Tanım 3.3

μ ve $\sigma; S$ nin bulanık alt kümeleri olsun. μ ve σ nin kartezyen çarpımı

$$\mu \times \sigma(x, y) = \min(\mu(x), \sigma(y)) \quad \forall x, y \in S$$

olarak verilir.

Tanım 3.4

σ, S nin bulanık alt kümesi olsun. O zaman σ üzerinde bulanık bağıntı olan S üzerindeki en güçlü bulanık bağıntısı μ_σ şöyle tanımlanır.

$$\forall x, y \in S \text{ için } \mu_\sigma(x, y) = \sigma \times \sigma(x, y) = \min(\sigma(x), \sigma(y)).$$

Yardımcı Teorem 3.1

μ ve σ, S nin bulanık alt kümeleri olsun. O zaman

i) $\mu \times \sigma$ S üzerinde bir bulanık bağıntıdır.

ii) $(\mu \times \sigma)_t = \mu_t \times \sigma_t \quad \forall t \in [0, 1]$

İspat

i) $\mu \times \sigma(x, y) = \min(\mu(x), \sigma(y)) \in S \times S$ olduğu kolayca gözükür. Çünkü μ ve σ, S nin bulanık alt kümeleridir.

ii) $\mu \times \sigma(x, y) \geq t$ olsun. Buradan

$(x, y) \in (\mu \times \sigma)_t$ dir.

$$\mu \times \sigma (x,y)=\min(\mu(x), \sigma(y)) = \mu(x)$$

$\mu(x) \geq t \Rightarrow x \in \mu_t$ olsun. $\sigma(y) \geq t$ olur ve buradan $y \in \sigma_t$ elde edilir. $(\mu \times \sigma)_t \subset \mu_t \times \sigma_t$ * sonucu elde edilir.

Tersine

$x \in \mu_t$ ve $y \in \sigma_t$ olsun. O zaman $\mu(x) \geq t$ ve $\sigma(y) \geq t$ olur. Şimdi

$\mu \times \sigma (x,y)=\min(\mu(x), \sigma(y)) = \mu(x) \geq t$ olur ve buradan $(x,y) \in (\mu \times \sigma)_t$ sonucu elde edilir. Veya

$\mu \times \sigma (x,y)=\min(\mu(x), \sigma(y)) = \mu(y) \geq t$ olur ve buradan $(x,y) \in (\mu \times \sigma)_t$ sonucu elde edilir. Bunun sonucu olarak $\mu_t \times \sigma_t \subset (\mu \times \sigma)_t$ dır. **

* ve ** den $(\mu \times \sigma)_t = \mu_t \times \sigma_t$ olduğu görülür.

Tanım 3.5

Eğer μ S üzerinde bulanık bağıntısı ise o zaman μ ' nün bulanık bağıntı olduğu S üzerindeki en zayıf σ_μ bulanık bağıntısı şöyle tanımlanır;

$$\forall x, y \in S \text{ için } \sigma_\mu(x) = \sup_{y \in S} \{\max(\mu(x,y), \mu(y,x))\}.$$

Tanım 3.6

μ ve σ G 'nin bulanık alt kümeleri olsun. O zaman

$$\mu \circ \sigma(x) = \sup_{x=yz} \{\min(\mu(y), \sigma(z))\} \quad \forall x \in G$$

dır.

Yardımcı teorem 3.2

μ, σ ve η G 'nin bulanık alt kümeleri olsun. O zaman

$$\mu \circ (\sigma \circ \eta) = (\mu \circ \sigma) \circ \eta$$

dir.

İspat :

$$\begin{aligned} \mu \circ (\sigma \circ \eta)(x) &= \sup_{x=yz} (\min(\mu(y), \sigma \circ \eta(z))) \\ &= \sup_{x=ykt} (\min(\mu(y), \sigma(k), \eta(t))) \\ &= \sup_{x=mt} (\min(\mu \circ \sigma(m), \eta(t))) \end{aligned}$$

TC YEREL YÖNETİMLERİN İÇİŞİLERİ BAKANLIĞI
DOKÜMAN

$$=(\mu\sigma)\circ\eta(x)$$

Eğer μ ve σ , S 'nin bulanık alt kümeleri ise $\mu \leq \sigma$ demekle $\mu(x) \leq \sigma(x) \quad \forall x \in S$ olduğu anlaşılabacaktır.

Yardımcı teorem 3.3

μ , G 'nin bir bulanık alt kümesi olsun. O zaman $\mu\sigma\mu \leq \mu$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) \quad \forall x, y \in G$$

olmasıdır.

İspat:

$\mu\sigma\mu \leq \mu$ olsun.

$\mu\sigma\mu(xy) = \sup_{k=xy} (\min(\mu(x), \mu(y))) \leq \mu(xy)$ olduğundan ikinci kısım ispatlanmış olur.

Tersine ;

$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y))$ olsun. O zaman

$\mu(xy) \geq \min(\mu(x), \mu(y)) = \sup(\min(\mu(x), \mu(y))) = \mu\sigma\mu(xy)$ olduğundan birinci kısım ispatlanmış olur.

Her iki ispattan dolayı istenilen sonuç elde edilmiş olur.

Teorem 3.1:

μ ve σ , G 'nin bulanık alt grupları olsun. O zaman $\mu\sigma$ 'nin G 'nin bulanık alt grubu olması için gerek ve yeter koşul

$$\mu\sigma = \sigma\mu$$

olmasıdır.

İspat:

$\forall x \in G$ için $\mu\sigma(x) = \sigma\mu(x)$ dir. Eğer

$\mu\sigma = \sigma\mu$ ise, o zaman

$$(\mu\sigma) \circ \mu\sigma = (\mu\sigma\mu) \circ \sigma\sigma \leq \mu\sigma \text{ olur.}$$

Çünkü μ ve σ , G 'nin bulanık alt gruplarıdır.

$$\mu\sigma(xy) \geq \min(\mu\sigma(x), \mu\sigma(y)) \quad \forall x, y \in G$$

Aynı zamanda

$$\mu\sigma(x^{-1}) = \sigma\mu(x) = \mu\sigma(x)$$

o zaman $\mu\sigma$, G 'nin bulanık alt grubudur.

Tersine,

$\mu\sigma$ nin G 'nin bir bulanık alt grubu olduğunu kabul edelim.

$$\forall x \in G \text{ için } \mu\sigma(x) = \mu\sigma(x^{-1}) = \sigma\mu(x)$$

$$\mu\sigma = \sigma\mu$$

elde edilir.

Teorem 3.2:

- i) μ ve σ , R 'nin bulanık sol (sağ) idealleri olsun. O zaman $\mu \times \sigma$, $R \times R$ nin bulanık sol (sağ) idealidir.
- ii) μ ve σ , G 'nin bulanık alt grupları olsun. O zaman $\mu \times \sigma$, $G \times G$ nin bir bulanık alt grubudur.

İspat:

i)

$$\mu \times \sigma(0,0) = \min(\mu(0), \sigma(0)) \text{ dir.}$$

$\forall t \in \text{Im}(\mu \times \sigma)$ olsun. o zaman $t \leq \mu(0)$ ve $t \leq \sigma(0)$ dır.

Sonuçta

μ_i ve σ_i , R 'nin sol (sağ) idealleridir. Bu yüzden $\forall t \in \text{Im}(\mu \times \sigma)$ için

$(\mu \times \sigma)_i = \mu_i \times \sigma_i$, $R \times R$ nin sol idealleridir. Sonuçta $\mu \times \sigma$ R 'nin bulanık sol idealidir.

ii) Bu da i deki gibi çözülür.

Teorem 3.3

μ ve σ , R 'nin bulanık alt kümeleri olsun. $\mu \times \sigma$, $R \times R$ nin bulanık sol (sağ) ideali olsun. O zaman

i) $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0)$ veya $\sigma(x) \leq \sigma(0)$ dır.

ii) Eğer $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0)$ ise, o zaman

$$\mu(x) \leq \mu(0) \text{ veya } \sigma(x) \leq \sigma(0) \text{ dir.}$$

iii) Eğer, $\forall x \in R$ için $\sigma(x) \leq \sigma(0)$ ise, o zaman

$$\mu(x) \leq \mu(0) \text{ veya } \sigma(x) \leq \sigma(0) \text{ dir}$$

iv) μ veya σ , R 'nin bulanık sol idealidir.

İspat:

i) $x, y \in R$ için $\mu(x) > \mu(0)$ ve $\sigma(y) > \sigma(0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\mu \times \sigma(x, y) = \min(\mu(x), \sigma(y)) > \min(\mu(0), \sigma(0))$$

$$= \mu \times \sigma(0, 0) \text{ dır.}$$

Bu da $\mu \times \sigma$ nin $R \times R$ nin bir bulanık sol(sağ) ideali olmasıyla çelişir.

ii) $\mu(x) > \sigma(0)$ ve $\sigma(y) > \sigma(0)$ olacak şekilde $\exists x, y \in R$ bulunabileceğini kabul edelim.

O zaman

$$\mu \times \sigma(0, 0) = \sigma(0) \text{ dır.}$$

$$\begin{aligned} \mu \times \sigma(x, y) &= \min(\mu(x), \sigma(y)) \\ &> \sigma(0) = \mu \times \sigma(0, 0) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Bu da $\mu \times \sigma$ nın bulanık sol ideali olmasıyla çelişir.

iii) $\mu(0) < \mu(x)$ ve $\mu(0) > \sigma(y)$ olacak şekilde $\exists x, y \in R$ bulunabileceğini kabul edelim. O zaman

$$\mu \times \sigma(0, 0) = \mu(0) \text{ olur.}$$

$$\begin{aligned} \mu \times \sigma(x, y) &= \min(\mu(x), \sigma(y)) \\ &\geq \mu(0) = \mu \times \sigma(0, 0) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Bu da $\mu \times \sigma$ nın bulanık sol ideal olmasıyla çelişir. Bu yüzden, eğer $\sigma(x) \leq \sigma(0)$ ise

$\mu(x) \leq \mu(0)$ veya $\sigma(x) \leq \sigma(0)$ dir.

iv) i'nin yardımıyla $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0)$ veya $\sigma(x) \leq \sigma(0)$ dir. Genelliği bozmadan $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \mu(0)$ olduğunu kabul edelim. O zaman, ii yardımıyla $\forall x \in R$ için $\mu(x) \leq \sigma(0)$ veya $\sigma(x) \leq \sigma(0)$.

I.durum;

$\mu(x) \leq \sigma(0) \quad \forall x \in R$ için olsun. O zaman $\forall x \in R$ için $\mu \times \sigma(x, 0) = \mu(x)$ dir.

$x, y \in R$ olsun.

$$\begin{aligned} \mu(x-y) &= \mu \times \sigma(x-y, 0) \\ &\geq \min(\mu \times \sigma(x, 0), \mu \times \sigma(y, 0)) \\ &= \min(\mu(x), \mu(y)) \text{ dir.} \end{aligned}$$

Aynı zamanda

$$\begin{aligned} \mu(xy) &= \mu \times \sigma(xy, 0) \\ &= \mu \times \sigma((x, 0)(y, 0)) \\ &\geq \mu \times \sigma(y, 0) \\ &= \mu(y) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Böylece μ , R 'nin bir bulanık sol idealidir.

II. durum:

$\forall x \in R$ için $\sigma(x) \leq \sigma(0)$ olsun, birinci durumun olmadığını kabul edelim. O zaman $\mu(y) > \sigma(0)$ olacak şekilde en az bir $y \in R$ vardır. Buradan $\mu(0) \geq \mu(y) > \sigma(0)$ olur.

Sonuçta

$\mu \times \sigma(0, x) = \min(\mu(0), \sigma(x)) = \sigma(x)$ dır. Bu, I. durum da olduğu gibi σ nın R nin bir bulanık sol (sağ) ideali olduğunu gösterir.

Bunlardan dolayı μ veya σ , R 'nin bir bulanık sol idealidir.

Teorem 3.4

μ ve σ , G 'nin bulanık alt kümeleri olmak üzere, $\mu \times \sigma$, $G \times G$ nin bulanık alt grupları olsun. O zaman ,

- i) $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$ veya $\sigma(x) \leq \sigma(e)$ dır.
- ii) $\forall x \in G$ için $\mu(x) \leq \mu(e)$ ise o zaman $\mu(x) \leq \sigma(e)$ veya $\sigma(x) \leq \sigma(e)$ dır.
- iii) $\forall x \in G$ için $\sigma(x) \leq \sigma(e)$ ise o zaman $\sigma(x) \leq \mu(e)$ veya $\mu(x) \leq \mu(e)$ dır.
- iv) μ veya σ , G 'nin bir bulanık alt grubudur.

İspat:

i) $\mu(x) > \mu(e)$ ve $\sigma(y) > \sigma(e)$ olduğunu kabul edelim. O zaman

$$\begin{aligned} \mu \times \sigma(x, y) &= \min(\mu(x), \sigma(y)) \\ &> \min(\mu(e), \sigma(e)) \\ &= \mu \times \sigma(e, e) \end{aligned}$$

dır. Bu da $\mu \times \sigma$ nın bir bulanık alt grup olmasıyla çelişir.

ii) $\mu(x) > \sigma(e)$ ve $\sigma(y) > \sigma(e)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \mu \times \sigma(x, y) &= \min(\mu(x), \sigma(y)) \\ &> \sigma(e) \\ &= \min(\mu(e), \sigma(e)) \\ &= \mu \times \sigma(e, e) \text{ dır.} \end{aligned}$$

Bu da $\mu \times \sigma$ nın bulanık alt grup olmasıyla çelişir.

iii) $\sigma(x) > \mu(e)$ ve $\mu(x) > \mu(e)$ olsun. O zaman

$$\begin{aligned} \mu \times \sigma(x, y) &= \min(\mu(x), \sigma(y)) \\ &> \mu(e) \end{aligned}$$

$$= \min(\mu(e), \sigma(e))$$

$$= \mu \times \sigma(e, e) \text{ dır.}$$

Bu da $\mu \times \sigma$ nın bulanık alt grup olmasıyla çelişir.

iv) $\mu(x) \leq \sigma(e)$ olsun

$\mu \times \sigma(x, e) = \mu(x)$ olur. O zaman $\forall x, y \in R$ için,

$$\mu(xy) = \mu \times \sigma(xy, 0)$$

$$= \mu \times \sigma(x, 0)(y, 0))$$

$$\geq \mu \times \sigma(y, 0)$$

$$= \mu(y) \text{ dır.}$$

$$\mu(x^{-1}) = \mu \times \sigma(x, e)$$

$$= \mu \times \sigma(x, e)$$

$$= \mu(x)$$

dır. Bu yüzden μ , G nin bir bulanık alt grubudur. σ nın bulanık alt grup olması aynı şekilde gösterilir.

Yardımcı teorem 3.4 :

i) σ , R nin bir bulanık sol (sağ) ideali ve $\mu = \mu_\sigma$ olsun. O zaman

$$\sigma_\mu = \sigma \text{ dır.}$$

ii) σ , G nin bir bulanık alt grubu ve $\mu = \mu_\sigma$ olsun. O zaman

$$\sigma_\mu = \sigma$$

dır.

İspat:

$$i) \sigma_\mu(x) = \mu \times \mu(x, 0)$$

$$= \min(\mu(x), \mu(0))$$

$$= \min(\sigma \times \sigma(x, 0), \sigma \times \sigma(0, 0))$$

$$= \min(\sigma(x), \sigma(0))$$

$$= \sigma(x)$$

dır. Buradan istenen sonuç elde edilmiş olur.

$$ii) \sigma_\mu(x) = \mu \times \mu(x, e)$$

$$= \min(\mu(x), \mu(e))$$

$$= \min(\sigma \times \sigma(x, e), \sigma \times \sigma(e, e))$$

$$= \min(\sigma(x), \sigma(e))$$

$$= \sigma(x)$$

dır. Buradan istenen sonuç elde edilmiş olur.

Sonuç 3.1

i) μ ve σ , $\mu \times \sigma$ bulanık ideal olacak şekilde R 'nin bulanık alt kümeleri olsunlar. Eğer

$$\forall x \in R \text{ için } \mu(0) = \sigma(0), \quad \mu(0) \geq \mu(x)$$

$$\sigma(0) \geq \sigma(x) \quad \text{ise}$$

o zaman μ ve σ ikisi de R 'nin bulanık sol idealleridir.

ii) $\mu \times \sigma$, $G \times G$ nin bulanık alt grupları olacak şekilde μ ve σ , G 'nin bulanık alt kümeleri olsunlar. Eğer

$$\forall x \in G \text{ için } \mu(e) = \sigma(e), \quad \mu(e) \geq \mu(x)$$

$$\sigma(e) \geq \sigma(x) \quad \text{ise}$$

o zaman μ ve σ ikisi de G 'nin bulanık alt gruplarıdır.

İspat:

i) Bir önceki ispatta ii ve iv nin yardımıyla istenen sonuç elde edilir.

ii) Aynı şekilde μ ve σ nin bulanık alt grup olduğu ispatlanır.

Buna karşılık eğer $\mu \times \sigma$, $R \times R$ nin bulanık sol (sağ) ideali ise her zaman μ ve σ nin bulanık sol (sağ) ideal olmasını gerektirmediğine dair örnek vereceğiz.

Örnek 3.1

R en az iki elemandan oluşan bir halka olsun. $0 \leq t \leq s < 1$ olsun. $\forall x \in R$ için

$\mu(x) = t$, ve $\sigma(0) = s$, $\sigma(x) = 1$ olacak şekilde μ ve σ , R 'nin bulanık alt kümeleri olsunlar. O zaman $\forall x, y \in R$ için

$$\mu \times \sigma(x, y) = \min(\mu(x), \sigma(y)) = t$$

dır. Sonuçta $\mu \times \sigma$, $R \times R$ nin bulanık sol (sağ) idealidir. Çünkü $\mu \times \sigma$ sabit fonksiyondur.

μ , R nin bir bulanık idealidir fakat σ değildir.

Çünkü $0 \neq x \in R$ için

$$\sigma(0) < \sigma(x)$$

dır. Eğer $s=t$ ise

$$\sigma(0) = \mu(0)$$

olduğuna dikkat edelim.

Uyarı:

G en az iki elemandan oluşan bir grup ve. $0 \leq t \leq s < 1$ olsun. $\forall x \in G$ için

$\mu(x) = t$, ve $\sigma(e) = s$, $\sigma(x) = 1$ olacak şekilde μ ve σ , G 'nin bulanık alt kümeleri

olsunlar. O zaman $\forall x, y \in G$ için

$$\mu \times \sigma(x, y) = \min(\mu(x), \sigma(y)) = t$$

dır. Sonuçta $\mu \times \sigma$, $G \times G$ 'nin bulanık alt grubudur. Fakat σ , G 'nin bir bulanık alt grubu değildir. Bu daha önceki teorem 3.3'ün sonucunun tersini gösterir. .

. Eğer $s=t$ ise

$$\sigma(e) = \mu(e)$$

olduğuna dikkat edin.

Sonuç 3.2

i) Eğer σ , R nin bulanık alt kümesi olsun $\mu_\sigma = \sigma \times \sigma$ 'nin, $R \times R$ nin bir bulanık sol (sağ) ideali olması için gerek ve yeter koşul σ nın R nin bir bulanık sol (sağ) ideali olmasıdır.

ii) σ , G nin bir bulanık alt kümesi olsun. $\mu_\sigma = \sigma \times \sigma$ 'nin, $G \times G$ nin bir bulanık alt grup olması için gerek ve yeter koşul σ nın G nin bir bulanık alt grubu olmasıdır.

İspat:

Yukarıdaki sonuçların ispatı daha önceki teoremlerin sonuçlarından kolayca görülür..

Teorem 3.5

i) μ , $R \times R$ nin bir bulanık ideali olsun. O zaman $\forall x, y, z \in R$ için

$$\mu(x - y, z) = \mu(0) \quad \text{veya}$$

$$\mu(x - y, z) = \mu(x, z) = \mu(y, 0)$$

dır.

ii) $\mu, G \times G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. O zaman $\forall x, y, z \in G$ için

$$\mu(xy^{-1}, z) = \mu(y, e) \quad \text{veya}$$

$$\mu(xy^{-1}, z) = \mu(x, z) \quad \text{veya}$$

$$\mu(x, z) = \mu(y, e)$$

dır.

İspat:

i) $t_1 = \mu(x - y, z)$ $t_2 = \mu(y, 0)$ ve $t_3 = \mu(x, z)$ olsun. O zaman μ 'nin $R \times R$ nin bir bulanık ideali olduğunu kullanarak,

$$t_1 \geq \min(t_2, t_3), \quad t_2 \geq \min(t_1, t_3), \quad t_3 \geq \min(t_1, t_2)$$

elde edilir.

ii) Bu teoremin ispatı i' ye benzer şekilde yapılabilir.

Sonuç 3.3

i) $\mu, R \times R$ bir bulanık sol ideali olsun. O zaman $\forall b \in R$ için

$$\mu(b, b) = \mu(b, 0) \quad \text{veya}$$

$$\mu(b, b) = \mu(0, b) \quad \text{veya}$$

$$\mu(b, 0) = \mu(0, b)$$

dir.

ii) $\mu, G \times G$ nin bir bulanık alt grubu olsun. O zaman $\forall b \in G$ için

$$\mu(b, b) = \mu(b, e) \quad \text{veya}$$

$$\mu(b, b) = \mu(e, b) \quad \text{veya}$$

$$\mu(b, e) = \mu(e, b)$$

dir.

İspat:

i) $x = y = z = b$ aldığımız zaman bir önceki teoremin sonucu olarak ispat tamamlanmış olur.

ii) $x = y = z = b$ alınması ispat için yeterlidir.

Şimdi ise yukarıdaki sonuçtaki alınan üç sayının birbirine eşit olması gerekmediğine dair örnek vereceğiz.

Örnek 3.2

$R = \mathbb{Z}$ tamsayılar halkası, $G = \mathbb{Z}$ toplama işlemi altındaki tamsayılar grubu olsun.

σ , $R(G)$ nin bir bulanık alt kümesi olsun ve

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma(x) = 1 & x \equiv 0(\text{mod } 2) \text{ ise} \\ \sigma(x) = 0 & x \equiv 1(\text{mod } 2) \text{ ise} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın.

μ , $R(G)$ üzerinde bir bulanık bağıntısı olup $\forall x, y \in R(G)$ için

$$\mu(x, y) = \sigma(x)$$

olarak tanımlansın. tanımlansın. O zaman μ nün $R \times R(G \times G)$ nin bir bulanık ideal(bulanık alt grup) olup olmadığı kontrol edebiliriz. Şöyle ki,

$b = 1$ olsun. O zaman

$$\mu(b, b) = \sigma(b) = 0,$$

$$\mu(b, 0) = \sigma(b) = 0$$

$$\mu(0, b) = \sigma(0) = 1$$

olur ve sonuç olarak

$$\mu(b, b) = \mu(b, 0) < \mu(0, b)$$

dir.

Eğer μ , $R \times R$ nin bir bulanık sol ideali ise o zaman $\forall x, y \in R$ için

$$\mu(0, 0) \geq \mu(x, y),$$

dir.

Biz şimdi bir R halkası içerisinde

$$\mu(x, z) > \mu(0, y)$$

şartını sağlayan x, y, z gibi elemanların var olabileceğini göstermek için bir örnek vereceğiz.

Örnek 3.3

R bir öz sol ideal A ya sahip olan ve en az dört elemandan oluşan bir halka olsun.

σ , R nin bir bulanık alt kümesi olsun ve

$$\sigma(x) = \begin{cases} \sigma(x) = 1 & x \in A \text{ ise} \\ \sigma(x) = 0 & x \notin A \text{ ise} \end{cases}$$

şekilde tanımlansın. O zaman μ nün R nin bir bulanık sol ideal olup olmadığı kolayca kontrol edilebilir.

$$\mu = \mu_\sigma = \sigma \times \sigma \text{ olsun.}$$

O zaman daha önce yapmış olduğumuz teorem 3.3 yardımıyla μ nün $R \times R$ nin bir bulanık sol ideal olduğu görülür.

$x, z \in A$ ve $y \notin A$ olsun. O zaman

$$\mu(y, 0) = \min(\sigma(y), \sigma(0)) = 0 \text{ dir. Buna karşın}$$

$$\mu(x, z) = \min(\sigma(x), \sigma(z)) = 1$$

dir.

Sonuçta

$$\mu(x, z) > \mu(y, 0) \text{ elde edilir. Aynı zamanda}$$

$$\mu(0, y) = 0 = \mu(y, 0)$$

dir.

Sonuç olarak

$$\mu(x, z) > \mu(0, y)$$

dir.

Bu bölümü eğer μ , $R \times R$ nin bir bulanık sol ideali ise σ_μ ' nün R nin bir bulanık sol ideali olması gerekmediğini ve eğer μ , $G \times G$ nin bir bulanık alt grubu ise o zaman σ_μ ' nin G nin bir bulanık alt grubu olması gerekmediğine dair iki örnek vererek bitireceğiz.

Örnek 3.4

$R = Z_6$ bir tamsayılar halkası ve $H = \{0, 3\}$ ve $K = \{0, 2, 4\}$ olsun. O zaman H ve K, R nin idealleri olduğu kolayca görülür.

$$H_0 = \{(0, 0)\}, H_1 = H \times K \text{ ve } H_2 = R \times R \text{ olsun.}$$

O zaman

$$\forall 0 \leq i \leq 2 \text{ için } H_i, R \times R \text{ nin idealleridir.}$$

$$1 \geq t_0 > t_1 > t_2 \geq 0 \text{ ve } \mu, R \times R \text{ nin bir bulanık alt kümesi olmak üzere}$$

$$\mu(H_0) = t_0 \quad \mu(H_1 \setminus H_0) = t_1 \quad \mu(H_2 \setminus H) = t_2$$

şeklinde tanımlansın.

$\forall 0 \leq i \leq 2$ için $\mu_i = H_i$ dir. Buradan, $\forall t \in \text{Im}(\mu)$ için μ_i 'nin, $R \times R$ nin bir ideali olduğu gözükür. Sonuç olarak, μ , $R \times R$ nin bir bulanık idealidir.

$$\forall x \in R \text{ için } (5, x), (x, 5) \notin H_1, \text{ olduğundan}$$

$$\sigma(5) = t_2$$

dir. Aynı zamanda $(3, 0) \in H_1$ olduğundan

$$\sigma_{\mu} \geq \max(\mu(3,0), \mu(0,3)) = t_1$$

dir. $(0,2) \in H_1$ olduğundan

$$\sigma_{\mu}(2) \geq \max(\mu(2,0), \mu(0,2)) = t_1$$

dir. Bu yüzden

$$\min(\sigma_{\mu}(2), \sigma_{\mu}(3)) \geq t_1 > t_2 = \sigma_{\mu}(5) = \sigma_{\mu}(2+3)$$

dir. Sonuç olarak σ_{μ} , R nin bir bulanık ideali değildir.

Örnek 3.5

Klein 4 lü grup $G = \{ e, a, b, ab \mid a^2 = b^2 = e \text{ ve } ab = ba \}$ olsun. $H = \{e, a\}$ ve $K = \{e, b\}$ olsun. O zaman H ve K G nin alt gruplarıdır.

$$H_0 = \{(e, e)\}, \quad H_1 = H \times K, \quad \text{ve} \quad H_2 = G \times G \quad \text{ve} \quad 1 \geq t_0 > t_1 > t_2 \geq 0$$

olsunlar.

$$\mu(H_0) = t_0 \quad \mu(H_1 \setminus H_0) = t_1 \quad \mu(H_2 \setminus H) = t_2$$

şeklinde tanımlı $G \times G$ nin bir bulanık alt kümesi olsun. O zaman μ , $G \times G$ nin bir bulanık alt grubudur. Bir önceki örnekte olduğu gibi

$$\sigma_{\mu}(ab) = t_2 < t_1 \leq \min(\sigma_{\mu}(a), \sigma_{\mu}(b))$$

ifadesi kolayca elde edilir. Bu yüzden σ_{μ} , G nin bir bulanık alt grubu değildir.

KAYNAKLAR

- Abou-Zaid, S. (1993) , “On Fuzzy Subgroups”, Fuzzy Set and Systems,55:237-240
- Kumar, R. (1991), “Fuzzy Irreducible Ideals in Rings”, Fuzzy Set and Systems,42:369-379
- Kumar, R., (1992), “Certain Fuzzy Ideals of Rings Redefined”, Fuzzy Set and Systems, 46:251-260
- Kumar,R. (1992), “Fuzzy Nil Radicals and Fuzzy Semi-primary Ideals of Ring”, Fuzzy Set and Systems,51:345-350
- Malik, D. S., Mordeson J., (1991), “Fuzzy Relations On Rings and Groups”, Fuzzy Set and Systems, 43:117-123
- Mukherjee, N., Bhattacharya, P., (1984), “Fuzzy Normal Subgroups and Fuzzy Cosets”, Information Science, 34:225-239
- Mukherjee, T. K., Sen, M. K., (1989), “Prime Fuzzy Ideals in Rings”, Fuzzy Set and Systems, 32:337-341
- Rosenfeld, A., (1971), “Fuzzy Groups”, Journal Mathematics and Analysis Application, 35:512-517
- Sivaramakrisna D. P., (1981), “Fuzzy Groups and Level Subgroups”, Journal of Mathematical Analysis and Application, 84:264-269
- Wenxiang, G., Tu, L., (1993), “The Properties of Fuzzy Divisible Groups”, Fuzzy Set and Systems,56:195-198

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Bayram Ali Ersoy

Doğum Tarihi : 01 Şubat 1974

Doğum Yeri : Isparta

Lise Öğrenimi : 1988-1991 İstanbul Tuna Lisesi.

Yüksek Öğrenimi : 1997 yılında Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim
Fakültesi Matematik Bölümünü bitirdi.

Görevi : 1998- Devam ediyor , Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat
Fakültesi Matematik Bölümü, Cebir ve Sayılar Teorisi Araştırma
Görevlisi