

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

ANALİTİK HİYERARŞİ YAKLAŞIMI

T-93704

Nevin YILMAZ

F.B.E. Matematik Anabilim Dalı Uygulamalı Matematik Programında
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Fatma TİRYAKİ

İSTANBUL, 2000

Tee danızmanı: Y. Doç. Dr. Fedme Sıryeler
Sıryeler

Jüri üyesi
Y. Doç. Dr. Nuran Günel
Nuran

Prof. Dr.
MUSTAFA SIVRI
Mustafa Sivri

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SEMBOL LİSTESİ.....	ii
ŞEKİL LİSTESİ	iii
ÇİZELGE LİSTESİ	iv
ÖNSÖZ	v
ÖZET	vi
ABSTRACT	vii
1. KARAR VERME VE ANALİTİK HİYERARŞİ YAKLAŞIMI (AHY) İLİŞKİLERİ.....	1
1.1 Karar Verme İşlevine Genel Bakış	1
1.2 Karar Türleri	4
1.3 Karar Verme Süreci	5
1.4 Karar Problemlerinin Unsurları	6
1.4.1 Alternatif hareket tarzları (seçenekler)	6
1.4.2 Durumlar	6
1.4.3 Sonuçlar	7
1.4.4 Gerçekleşme olasılıkları	7
1.4.5 Seçim kriteri	7
1.4.6 Deneyler	7
1.5 Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının Karar Analizleri Arasındaki Yeri	8
2. ANALİTİK HİYERARŞİ YAKLAŞIMI	11
2.1 Giriş	11
2.2 Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı (AHY)	12
2.3 Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının Uygulama Alanları	15
2.4 Hiyerarşiler ve Tipik Hiyerarşi Örnekleri	17
2.4.1 Tipik hiyerarşi örnekleri	20
2.4.2 Hiyerarşi kurmanın avantajları	22
2.5 AHY'nin Temel Aksiyomları	22
2.6 Ölçme ve Karar Verme Süreci	24
2.7 Seçeneklerin Önceliklendirilmesi	26
2.7.1 Ölçek oranları	27
2.7.2 Görelî üstünlükler	28
2.8 İkili Karşılaştırma Matrisi ve Çözümü	30
2.8.1 Özvektör hesaplaması	32
2.9 Tutarlılık ve Bir Özvektör Olarak Önceliğin Tutarlılıkla İlişkisi	33
2.10 AHY'nin Matematiksel Temelleri	39

2.11	Analitik Hiyerarşi Yönteminin Algoritması	44
2.12	Hiyerarşik Kompozisyon Prensipleri	45
2.13	Kararların Düzeltilmesi (Revising Judgments)	48
2.14	Grup Karar Verme Tekniklerinden Delphi Metodu ile Hiyerarşik Metodun Karşılaştırılması	50
2.15.	Bir Örnek Yardımı ile AHY Probleminin İncelenmesi	51
3.	LİNEER HİYERARŞİ İÇİN AHY ÖRNEKLERİ	75
3.1	Günlük Hayattan Bir Örnek: En Uygun Ev Seçimi	75
3.2	Milli Politikalar - Hükümet Kararları	76
3.3	Ulaşım Problemleri	79
3.4	Pazarlama Sektörüne Uygulama	80
3.5	Psikolojik Problemlere Ait Bir Örnek	82
3.6	Başkanlık Seçimine Ait Örnek	84
4.	GERİ BESLEMELİ SİSTEMLERDE ÖNCELİKLER.....	89
4.1	Giriş	89
4.2	Sistemleri Yapılandırma Ulaşılabilirlik Matrisi	94
4.3	Geri Beslemeli Sistemlerde Öncelik Ölçümleri	100
4.4	Süpermatris Önceliklerin Genel Kompozisyonu	103
4.5	Etki ve Mutlak Öncelikleri	112
4.6	Örnekler	118
4.6.1	Çocuk yetiştirme örneği	119
4.6.2	Çelik endüstrisi örneği	121
5.	GERİ BESLEMELİ SİSTEMLER VE SÜPERMATRİS TEKNİĞİ İLE İLGİLİ ÖRNEKLER	126
Örnek 1	Bir Öğretmenin Performansını Değerlendirme	126
Örnek 2	Bir Motorsiklet Dizaynı	128
Örnek 3	Voleybol	135
3.1	Ofansif Beceriler	135
3.2	Defansif Bilgiler	137
3.3	Hiyerarşik Analizler	137
3.4	Sistem Analizleri	139
3.4.1	Ofansif beceriler	139
3.4.2	Defansif beceriler	140
3.4.3	Sonuçların analizi	143
6.	SONUÇLAR.....	146
	KAYNAKLAR	147
	EKLER	149

Ek 1 Matris Özdeğer Problemleri	149
Ek 2 Önceliklerin Graf Teorisi ile İlgili Yorumları	152
Ek 3 Matrisler ile İlgili Tanımlar	156
ÖZGEÇMİŞ	161



SEMBOL LİSTESİ

A	Karar (ikili karşılaştırma) matrisi
a_{ij}	Karar matrisinin elemanları
a_{ji}	a_{ij} 'nin karşıtı (=reciprocal) elemanı
$d_{\max}$	A matrisinin en büyük özdeğeri
n_1	Matrisin boyutu
n	A matrisinin özdeğerleri
R.I.	Random indeks (random index)
T.I.	Tutarlılık indeksi (consistency index)
T.O.	Tutarlılık oranı (consistency ratio)
w_i	Ağırlık vektörü elemanları
$R_{(hi)}$	Ulaşılabilirlik kümesi
$A_{(hi)}$	(hi) elemanından önce gelen elemanlar
B_{ij}	Binary matris elemanları
W	Süpermatris
W^k	Süpermatrisin kararlı formu
LİP	Limit etki öncelik matrisi
LAP	Limit mutlak öncelik vektörü
$\psi(d)$	W 'nin karakteristik polinomu
$\psi'(d)$	d 'ye göre $\psi(d)$ fonksiyonun birinci türevi

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa

Şekil 1.1	Analiz tekniklerinin Meredith ve Surech tarafından sınıflandırılması .	8
Şekil 1.2	Analiz tekniklerinin Lavella ve Riggett tarafından sınıflandırılması ...	9
Şekil 1.3	Analiz tekniklerinin Soni ve diğerleri tarafından sınıflandırılması	9
Şekil 1.4	Analiz tekniklerinin Kolli ve diğerleri tarafından sınıflandırılması	10
Şekil 2.1	Bir lineer hiyerarşik yapı	19
Şekil 2.2	Bir non-lineer hiyerarşik yapı	19
Şekil 2.3	Ortaçağ Avrupasındaki şehir devletleri ile ilgili bir hiyerarşi örneği ...	20
Şekil 2.4	Genel hiyerarşi modeli	20
Şekil 2.5	Araba seçimine ait hiyerarşi	21
Şekil 2.6	Analitik hiyerarşi yönteminin çözüm aşamaları	44
Şekil 2.7	Okuldan sağlanan memnuniyetlik hiyerarşisi	45
Şekil 2.8	En iyi şehir seçimi problemine ait hiyerarşi	54
Şekil 2.9	Bir nehir geçişinin faydalarını gösteren hiyerarşik model	66
Şekil 2.10	Bir nehir geçişinin maliyetini gösteren hiyerarşik model	67
Şekil 3.1	En uygun ev seçimini gösteren hiyerarşik model	75
Şekil 3.2	Rehine kurtarma operasyonunun yapılıp yapılmamasına ait hiyerarşik yapı	79
Şekil 3.3	X Firmasının temel karar hiyerarşisi	82
Şekil 3.4	Bir çocuğun bireysel özgüveni ile ilgili hiyerarşi	83
Şekil 3.5	1980 Yılındaki başkan seçimleri	85
Şekil 4.1	Bir matrise ait network	97
Şekil 4.2	Metod uygulandıktan sonra network gösterilişi	97
Şekil 4.3	Örnek bir network	99
Şekil 4.4	Birbirine bağlı bir hiyerarşi	101
Şekil 4.5	Birbirine bağlı bir hiyerarşi	104
Şekil 4.6	Çocuk yetiştirme örneğine ait bileşenler ve birbirleri ile olan ilişkileri.....	121
Şekil 4.7	Çelik ticareti problemindeki bileşen ve faktörler	122
Şekil 5.1	Dış bağıllık ile ilgili bir şebeke	126
Şekil 5.2	İç bağıllık olan feedback olmayan bir hiyerarşi	126
Şekil 5.3	İç ve dış bağımlı olan şebeke	127
Şekil 5.4	Motorsiklet dizaynı örneğindeki fonksiyonlar arasındaki ilişkiler	130
Şekil 5.5	Tipik voleybol oyunu	136
Şekil 5.6	Voleybol takımı seçim hiyerarşisi	138
Şekil 5.7	Voleybol takımı örneğindeki sistem etkileşimleri	140

ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 2.1 Ölçek değerleri	27
Çizelge 2.2 Araba seçimi örneğine ait ikili karşılaştırma matrisi	31
Çizelge 2.3 Random indeks tablosu	39
Çizelge 2.4 Okuldan sağlanan memnuniyete göre kriterlerin karşılaştırılması	45
Çizelge 2.5 Altı kritere göre okulların karşılaştırılması	46
Çizelge 2.6 Relatif uzaklık tahminleri	52
Çizelge 2.7 Philadelphia'ya olan uzaklıkların inversi	53
Çizelge 2.8 İklim'e göre şehir karşılaştırmaları	56
Çizelge 2.9 Geçim maliyetine göre şehir rankları	60
Çizelge 2.10 İlkokul ve yüksekokullara göre şehir karşılaştırmaları	60
Çizelge 2.11 Kolej ve üniversitelere göre şehir karşılaştırmaları	61
Çizelge 2.12 İş değiştirme kolaylığına göre şehir karşılaştırmaları	61
Çizelge 2.13 Toplumsal sanat ve eğlence, dinlenme faaliyetlerine göre şehir karşılaştırmaları	61
Çizelge 2.14 Alt kriterlerin karşılaştırması	62
Çizelge 2.15 Hedef'e göre kriterlerin karşılaştırılması	62
Çizelge 2.16 Eğitim kriteri altında karma öncelikler	63
Çizelge 2.17 Yaşam kalitesi altında karma öncelikler	63
Çizelge 2.18 Şehirlerin genel öncelikleri	65
Çizelge 3.1 Ev seçimi örneğine ait alternatiflerin öncelikleri	76
Çizelge 3.2 Rehine kurtarma operasyonu ile ilgili öncelikler	78
Çizelge 3.3 Başkanlık seçimine ait 3ncü seviyedeki kriterlerin tanımı	86
Çizelge 4.1 Yatırım örneği için veriler	90
Çizelge 4.2 Yatırım örneği için hiyerarşik kompozisyon	91
Çizelge 4.3 Alternatiflere göre yılların karşılaştırılması	91
Çizelge 4.4 Yatırım örneği için süpermatris W	92
Çizelge 4.5 Yatırım örneği için $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k$	92
Çizelge 4.6 Çocuk yetiştirme örneğine ait bileşen ve faktörler.....	120
Çizelge 4.7 Çocuk yetiştirme örneği için ağırlıklandırılmamış süpermatris	120
Çizelge 4.8 Çelik ticareti için ağırlıklandırılmamış süpermatris	123
Çizelge 4.9 Çelik ticareti için ağırlıklandırılmış süpermatris	123
Çizelge 4.10 Çelik endüstrisi için süpermatrisin 89'ncü kuvveti	123
Çizelge 5.1 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonların alternatiflere göre karşılaştırmaları	129
Çizelge 5.2 Motorsiklet dizaynına ait kritere göre fonksiyonların karşılaştırmaları	129
Çizelge 5.3 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin karşılaştırmaları	131
Çizelge 5.4 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin karşılaştırmaları	132
Çizelge 5.5 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin karşılaştırmaları	133
Çizelge 5.6 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin karşılaştırmaları	133
Çizelge 5.7 İnteraktif beceriler matrisi	141
Çizelge 5.8 Geçiş matrisi	142

ÖNSÖZ

Karar verme süreci; gerek hareket seçenekleri arasında seçim yapma durumunda olan gerek de bunun sonuçlarına katlanacak olan herkesi etkileyen çok önemli bir süreçtir. Pekçok alanda karşımıza çıkan karar verme problemlerinde çeşitli karar analizi yöntemleri kullanılarak daha sağlıklı ve faydalı karar vermek amaçlanmaktadır. Bu kullanılan karar analizi yöntemlerinden birisi de Analitik Hiyerarşi Yaklaşımıdır. Bu soyut ve somut faktörleri birbirinden ayırmaz ve ölçümleri ikili karşılaştırmalar yaparak belirler. Özellikle yönetim, sosyal ve politik problemlerin çözümünde çok etkili olan bir yöntemdir.

Tezimdeki çalışmalarında beni bilgilendiren ve yönlendiren Danışman Hocam Yrd. Doç. Dr. Fatma TİRYAKİ'ye teşekkür ederim.



ÖZET

Günlük yaşamda vermek zorunda kalınan kararların bir kısmı oldukça basit iken büyük bölümü ise üzerinde derinlemesine düşünmeyi ve irdelemeyi gerektirir. Bu amaçla birçok bilim adamı tarafından çeşitli yöntemler geliştirilmiştir. Karmaşık yapılı karar problemlerinde, karar alternatif ve kriterlerine relatif (görelî) değerleri verilmek suretiyle yönetsel karar mekanizmasının çalıştırılması esasına dayanan birçok amaçlı karar verme yöntemi olan Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı (Proses) bunlardan biridir.

Çalışmanın birinci bölümünde; karar vermenin genel tanımı, karar türleri, karar verme süreci, karar probleminin unsurları hakkında genel bilgi ve Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının karar analiz teknikleri arasındaki yerinden kısaca bahsedilmiştir.

İkinci bölümde; Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının ana hatları ile incelendiği bu bölümde, yöntemin genel tanımlaması, uygulanması ve faydaları, dezavantajları anlatılmıştır. Ayrıca bu yöntemde AHY'nin uygulama aşamaları olan hiyerarşik yapıyı oluşturma, hiyerarşinin her seviyesinde öğelerin (elemanların) ikili karşılaştırma suretiyle önceliklerini (üstünlüklerin) belirlenmesi, ikili karşılaştırma (öncelik) matrisinin kurulması, özvektör ve özdeğerin hesaplanması ve sonuçların nasıl değerlendirileceği açıklanmıştır. Bu bölümde bu yöntemin matematiksel temellerinden söz edilmiştir. Literatürde mevcut olan birkaç örnek verilmiştir.

Üçüncü bölümde; lineer hiyerarşik yapıya ait literatürde mevcut olan günlük hayatta, milli politikalar-hükümet kararları, pazarlama vektörü gibi çeşitli alanlarda uygulanan AHY'den örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, non-lineer hiyerarşik yapıların oluşturduğu geri beslemeli sistemler ve bu sistemlerin önceliklerini belirleme ve böyle bir ölçümü gerçekleştirmek için süpermatris tekniği konusunda bilgi verilmiş ve konuyu açıklayıcı örnekler yer almıştır.

Beşinci bölümde ise, feedback sistemler ve süpermatris tekniğinin uygulandığı örnekler verilmiştir.

ABSTRACT

While some of the decisions which are to be made in daily life are rather simple, yet the larger part of them necessitate thinking deeply and examining. Various methods have been developed by a lot of scientists for that purpose. The analytical hierarchy approach is one of these which is the multi purpose decision making method based upon the basis of running the managerial decision mechanism by giving the relative priority values to the decision alternatives and criteria in the complicated decision problems.

In the first chapter of the study, a general information has been given about the decision problems, decision making concepts, types of decision, decision making process, elements of decision problem and mentioned briefly from the place of the Analytical Hierarchy Approach among the decision analysis techniques.

In the second chapter where AHP is examined with its fundamental principles, the general definition of the method, its application fields and advantages of the method as well as its disadvantages have been explained. On the other hand, building the hierarchic structure, determining the relative priorities of the elements at all the levels of hierarchy by a pair wise comparison, building the pair wise matrices, calculation of eigenvectors and eigenvalues, how the consistency ratio is calculated and evaluated which are the application fields of AHP in this method have been explained. The mathematical fundamentals of the method have been mentioned.

In the third chapter, some examples from AHP have been given which are applied in various fields such as marketing sector, government decisions, national politics, daily life that are available in the literature belonging to the linear hierarchic structure.

System with feedback and supermatrix technique have been given in the fourth and fifth chapter.

1. KARAR VERME ve ANALİTİK HİYERARŞİ YAKLAŞIMI (AHY) İLİŞKİLERİ

1.1.Karar verme işlevine genel bakış

İnsanoğlu varoluşundan bu yana önceden saptanmış amaçlarına ulaşmada değişik ve sayısız sorunla karşı karşıya kalmıştır. İşte bu sorunların varlığı onları sorunlara çözüm bulmaya, bir başka deyişle karar vermeye zorlamaktadır. Bir yandan kişinin içinde bulunduğu değişim dünyası öte yandan önceden saptanmış amaçlarını gerçekleştirme isteği karar verme sorununun ortaya çıkmasına neden olmuştur.

Günlük yaşantıda ve/veya her yönetim biçim ve düzeyinde ortaya çıkan/çıkacak olan problemler genellikle ekonomik, sosyal ve psikolojik karakterler taşırlar. Bu çeşit problemlerin çözümlenebilmesi için gerekli olan değişkenlerin karakterlerini kesin olarak tanımlamak kimi zaman olanaksız olmaktadır. Bu tür sorunların nedenleri fiziksel ve kimyasal olayların oluş nedenleri kadar açık bir biçimde ortaya konulamaz. Ekonomik, sosyal ve psikolojik sorunların tanımları zaman ve ortama göre de farklılaşmaktadır. İşte bu değişkenlerin karakterlerinin belirlenmesi için yapılan tanımlar ayrı ayrı değerlendirilerek bir veya birden fazla tanımın diğer tanımların arasından seçilmesi işlemi bir karar verme işlemidir. Diğer bir deyişle, belli bir döneme ilişkin belli sorunların çözümünde kullanılabilecek birbirinden ayrı özellikleri olan seçeneklerin olması durumunda bir seçim veya bir karar verme işlemi ortaya çıkar (Yozgat, 1994).

İnsanların yaşantıları boyunca sürekli olarak karşılaştıkları problemler iki grupta toplanabilir. Negatif yönlü olan birinci grup problemler bir tatminsizlik kaynağını, örneğin bir hastalığı ortadan kaldırma ile ilgilidir. Pozitif yönlü olan ikinci grup problemler ise bir tatmin kaynağına, örneğin paraya, arkadaşına, v.b. ulaşma ile ilgilidir.

Basit veya karmaşık yapılı bu tür problemlerle karşılaşan kişiler, problemin çözümü için mümkün hareket tarzları (seçenek) arasından en iyisini seçmek isterler. Ancak bazı durumlarda görülmüştür ki, insanın beyin kapasitesinin karmaşık kararları etkin ve sezgisel olarak sentezini gerçekleştirmede yeterli olmadığı ortaya çıkmıştır. Bunun için karar vericiler, karmaşık yapılı karar problemlerinde birtakım karar analizi yaklaşımlarından

faaydalanmaya çalışmışlardır. Tüm karar verme süreçlerine analitik olarak yaklaşabilmek için öncelikle bir kararı oluşturan temel öğelerin belirlenmesi gerekir. Daha sonra karar probleminin unsurları konusunda verilecek olan bu sözü edilen temel öğeler, alternatif hareket tarzları (seçenekler), seçim kriteri, sonuçlar, sonuçların gerçekleşme olasılıklarıdır. Burada da belirtildiği gibi herhangi bir karar probleminde ilk aşama, tüm olası hareket tarzlarının (seçeneklerinin) belirlenmesidir.

Buraya kadar anlatılanlar ışığında karar analizinin başlıca kullanım nedeni, mevcut seçeneklerin görelili olasılıklarını karşılaştırıp en iyi hareket tarzını seçmek için karar vericiye yardımcı olmaktır.

Karar analizi yaklaşımlarının boyut ve içeriği, ancak ölçülebilir bir getiri sağlanması halinde tam olarak saptanabilir. Bu yaklaşımların kullanımı her zaman doğru karar verebilmeyi sağlamaz. Bu durumda karar vericinin de, riskin bilincinde olması ve seçilen alternatif hareket tarzı üzerindeki sonuçlarını saptaması gerekir. Bu tür karar verme süreçlerinde şans öğesi de çok önemlidir. İşte bu yöntemler şans öğesini azaltıp, daha bilinçli kararlar verilmesini amaçlarlar. Bundan dolayı karar vericinin her zaman doğru karar vereceği beklentisinde olmaması gerekir.

Karar düşüncesi açısından, kararlar ister sezgisel, ister bilimsel bir yöntemle ele alınsın, problemle ilgili tüm değişkenlerin bir model haline getirilmesi gerekir.

Bu bağlamda karar analizi, karar problemlerinin matematiksel modelini ortaya koyup, istatistiksel irdelemelere bağlı olarak hareket tarzı öneren bir yöntem olarak tanımlanabilir. Tüm matematiksel modellerde olduğu gibi karar analizinde de göz ardı edilmemesi gereken gerçek, böylesi bir model ile oldukça ayrıntılı ve kesin bir matematiksel irdeleme gerçekleştirebilmek ile birlikte, modelin oluşumunda oldukça önemli bir diğer öğe n yargısal yapının göz ardı edilmesidir. Karar analizi modelleri de, tüm diğer modeller gibi gerçeği ancak yaklaşık olarak yansıtırılar. Karar analizi modellerinden beklenilmesi gereken kesin ve doğru cevabı vermesi değil, çok daha önemli olan problemin önemli özelliklerine derinlemesine yaklaşım getirmesidir. Yapılan çeşitli duyarlılık analizleri ile herhangi bir varsayımdaki küçük bir değişmenin karar vericinin kararını ne derecede

etkileyeceği hatta farklı bir karara yönlendireceği, hangi varsayımlarda kararın duyarsız kalacağı irdelenebilir.

Önceden hazırlanan ve bir dizi eyleme yol açan karara, alışlagelmiş karar da denilebilir. Bu kararda neyin nasıl yapılacağı, sonuçlara ulaşmak için ne gibi kaynaklar gerektiği büyük ölçüde bellidir. Bu kararlar oldukça güvenilir bir model halinde ne olacağını tahmin etmemizi sağlar ve nerede bulunduğumuzu, değişikliği ne zaman gerçekleştireceğimizi bildirir. Diğer karar türleri ile ilgili bilgi Bölüm 1.2’de verilecektir.

Genelde karar probleminin yapısı incelendikçe verilerin çokluğu ve aralarındaki karşılıklı ilişkiler, karar vericinin verileri kavrama yeteneğini aşar. Burada karar analizi yöntemlerinden yardım alınır, bunlardan birisi de Prof. Thomas L. Saaty tarafından geliştirilmiş olan Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı (Analytic Hierarchy Process)’dır.

Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı (AHY), karar problemlerinin yapılandırılmasında ve çözümünde kullanılan birçok amaçlı karar verme yöntemidir. Bu yöntem, bir amacı veya hedefi etkileyen faktörleri, birbirine benzer özellikler altında (kriterler, alt kriterler) gruplandırır ve amaca uygun hiyerarşiler şeklinde modelleyerek, her seviyenin amacı ne kadar ve nasıl etkilediğine dair önceliklendirme yapan bir karar verme sistemidir (Golden, 1989).

Bu yöntemin dayandığı ana prensip insanların bilgi ve deneyimlerinin, kullandıkları veriler kadar önemli olduğudur.

AHY, amaçlarımızı ve algılarımızı baştan başa bir senteze tamamlamak için kullanılabilir. AHY kararların uyumlu ya da geçişken olmasına ihtiyaç duymaz. Kararların uygunluk - ya da uygunsuzluk - derecesi AHY’nın uygulanmasının sonunda çıkarılır. AHY bir problem çözümü çatısıdır. Yani herhangi bir problemin elemanlarını göstermenin sistematik bir şeklidir. Bu yönteme ait detaylı bilgi Bölüm 2’de verilecektir.

Burada sözü edilen amaçlar, kriterlerin karar vericinin arzuları doğrultusunda yönlendirilmiş şekli olarak tanımlanabilir. Hedefler ise daha da somutlaştırılarak belirli değerlere dönüşmüş şekilleri olarak tanımlanabilir (Evren, 1992).

1.2.Karar Türleri

1. İçerik bakımından kararlar

- Temel amaç ve ilkeleri belirleyen kararlar,
- Amaçlara ulaşmak için işlenecek hareket biçimlerini, kullanılacak araçları belirleyen kararlar,
- Önceden saptanmış politika, ilke ve kuralları kuruluş etkinliklerine göre uygulayan gündelik kararlar,
- Belirlenmiş politikalara dayanmayan istisnai kararlar.

2. Yönetim basamağı bakımından kararlar

- Tepe yönetimi kararları
- Orta yönetim kararları
- Alt yönetim kararları

3. Süre bakımından kararlar

- Uzun süreli kararlar
- Orta süreli kararlar
- Kısa süreli kararlar

4. Karar vericilerin sayısı bakımından kararlar

- Bireysel kararlar
- Grup kararları

5. Nitelikleri açısından kararlar

- Açıklanan kararlar
- Açıklanamayan kararlar

6. Bilgi derecesi bakımından kararlar

- Belirlilik altında kararlar
- Risk altında kararlar
- Belirsizlik altındaki kararlar

7. Veriliş biçimleri açısından kararlar

- Sözel kararlar
- Yazılı kararlar

8. Veriliş sırası açısından kararlar

- Birinci derecede kararlar
- İkinci derecede kararlar
- 9. Yapıları açısından kararlar
 - Programlanabilir kararlar
 - Programlanmayan kararlar
- 10. Konuları açısından kararlar
 - Kişisel kararlar
 - Maddesel kararlar
- 11. Bağlantılı olma durumları açısından kararlar
 - Statik kararlar
 - Dinamik kararlar

1.3.Karar Verme Süreci

Karar verme sürecinin aşamaları çeşitli şekillerde verilebilir. Birinci şekil;

- Problemin tarifi ve analizi
- Karar kriterlerinin belirlenmesi
- Çeşitli seçenekler hakkında bilgi temini
- Karar kriterlerinin ağırlıklarının belirlenmesi
- Seçeneklerin kriterlere göre değerlendirilmesi
- Optimal seçeneğin belirlenmesi; “karar”

Başka bir şekilde;

- Karar verme fırsatını bulmak
- Olası davranış biçimlerini saptamak
- Davranış biçimleri arasından seçim yapmak

Bir diğer şekilde ise;

- Konunun tanımı
- Konunun çözümü için gerekli olan bilgilerin elde edilmesi
- Konunun çözümünde kullanılacak olan yöntemlerin belirlenmesi
- Konunun çözüm maliyetinin her yöntem için hesaplanması
- Her çözümün neden olabileceği çeşitli durumların değerlendirilmesi

- Çeşitli çözümler arasında bir tanesinin seçimi: “karar”
 - Kararın uygulanması
 - Uygulama sonuçlarının değerlendirilmesi
- olarak verilebilir.

1.4.Karar Problemlerinin Unsurları

1.4.1. Alternatif hareket tarzları (Seçenekler)

Karar vericinin seçimine hazır, karar verici tarafından o karar problemine ilişkin olarak uygulanabilecek hareket tarzları veya karar alternatifleridir. Belirli bir karar problemine ilişkin hareket tarzlarının en az iki olması karar probleminin varlığı açısından gereklidir. Aksi halde karar vermeyi gerektirecek bir durum yoktur.

Seçenekler, karar verme sonucunda seçimi konu alan karar öğeleridir. Bu nedenle, karar vericinin seçeneklerin neler olduğuna ilişkin kesin listeyi elde etmesi verilen kararların etkinliğinin bir ölçütüdür. Çünkü, seçenekler amaçların sağlanmasında kullanılan anahtarlardır.

Uygulamada karar seçeneklerinin çok fazla sayıda olması pratik olarak yarar sağlamamaktadır, bunların karar modelinde yer alması çözümü olanaksız kılabilmektedir. Buradan görüleceği gibi seçeneklerin sınırlandırılması gerekir. Sınırlandırma çeşitli şekillerde olabilir; ilk sırada karar vericinin yargı ve sezgisi gelmektedir. Başka bir yol da, heuristic düşünme ve programlamadır.

Karar seçenekleri geliştirilirken dikkat edilmesi gereken bir başka nokta da, seçeneklerin birbirini dışlayıcı yani birinin seçimi ötekilerin seçimini engelleyici nitelikte olması gerekliliğidir.

1.4.2. Durumlar

Sistemin çevresinde varolan, karar verici tarafından kontrol edilemeyen ve rasyonel yarışmacıların davranışından çok dış etkenlerin uyumsuzluğundan oluşan etkenler

kombinasyonudur. Girdi fiyatları, pazar istem durumları gibi çevresel değişkenler durumlarıdır.

Durumların oluşma sebeplerinin bilinmesi onların gerçekleşme olasılıklarının saptanmasında kolaylıklar sağlar.

1.4.3. Sonuçlar

Belirli bir durum altında belirli bir seçimin uygulanmasıyla ortaya çıkan değere sonuç denir. Sonuçları parasal veya yarar bazında değerlendirmek mümkündür.

1.4.4. Gerçekleşme olasılıkları

Bir olayın gerçekleşme şansına olasılık denir. İstatistikte üç türlü olasılık vardır:

- * Klasik (deney öncesi) olasılık yaklaşımı
- * Objektif (deneysel) olasılık yaklaşımı
- * Subjektif (kişisel) olasılık yaklaşımı

1.4.5. Seçim kriteri

Karar vericinin varolan seçeneklerden birini seçmekte kullandığı değerlendirme bazıdır.

Sonuçları karar ölçütü birimleriyle değerlendirmede temel olan iki ölçü kullanılır:

- * Objektif ölçü (para değeri)
- * Subjektif ölçü (kişisel yarar)

1.4.6. Deneyler

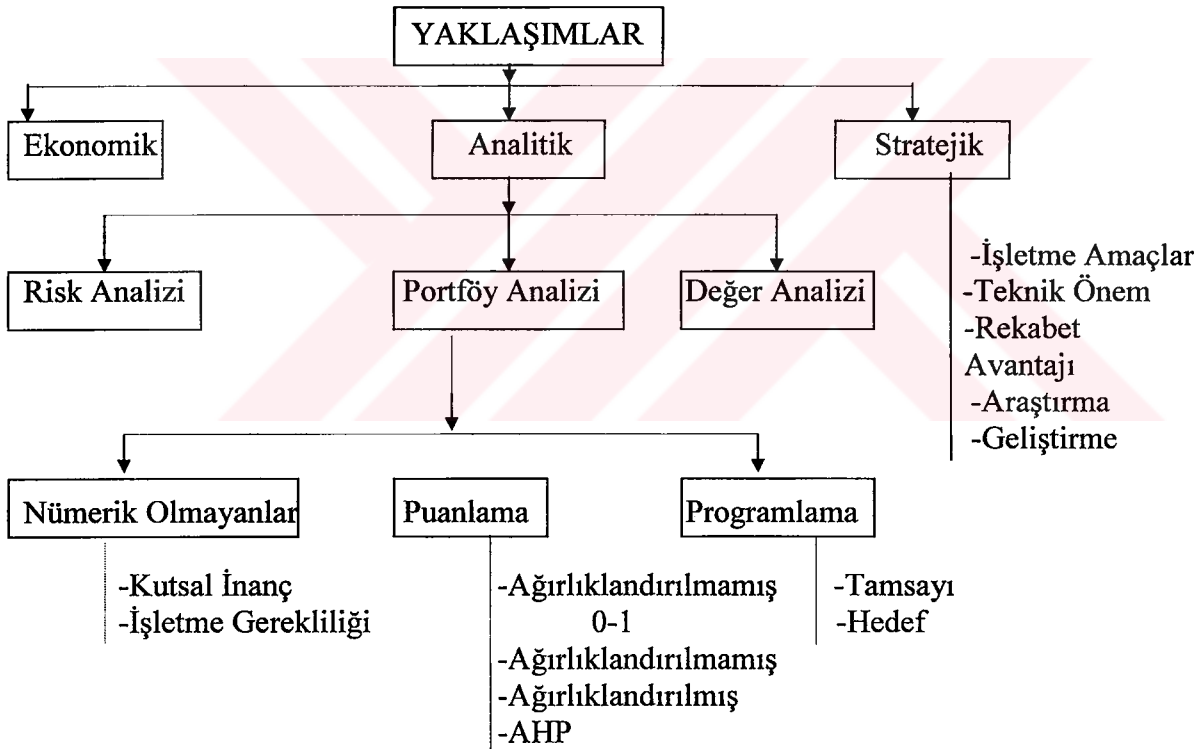
Bazı karar problemleri gelecekte ortaya çıkacak durumların gerçekleşme olasılıklarını daha kesin belirlemeye yarayan ek bilgileri temin etmek üzere belirli harcamaları gerektiren, yani maliyeti olan birtakım deneylerin, araştırmaların yapılmasına imkan tanır. Buradan bulunacak değer, hatasız bilginin değeridir (Yozgat, 1994).

1.5. Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının Karar Analizleri Arasındaki Yeri

Karar vericiler genelde istenen amaçlar, hedefler, kaynaklar, insanlar, insan grupları ve bunun gibi birçok boyutu olan karmaşık sistemler içinde karar vermeye çalışırlar.

Konu ile ilgili literatür gözden geçirildiğinde araştırmacıların Analiz Yöntemini birkaç şekilde sınıflandırdığı görülür. Meredith ve Suresh 1986 yılında yöntemleri üç büyük grupta toplamıştır.

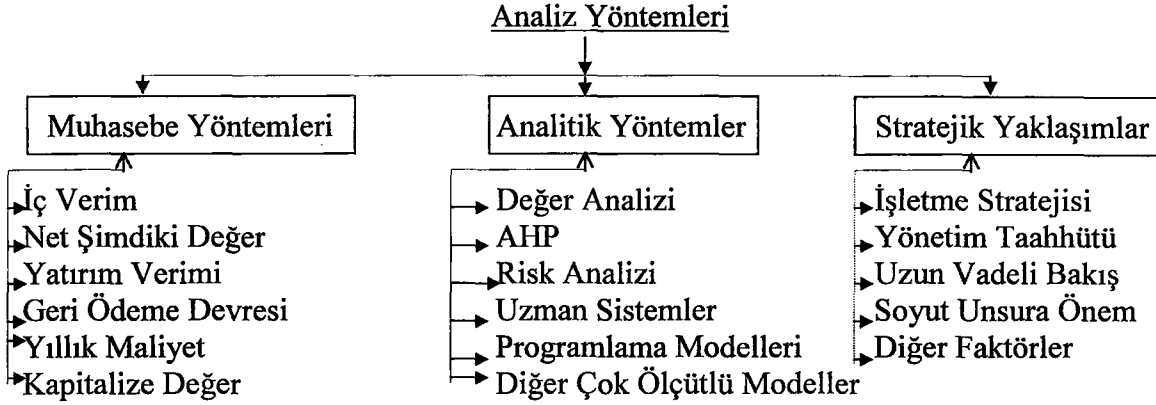
1. Tek başına imalat sistemleri için uygun yöntemler
2. Bağlantılı sistem için uygun yöntemler
3. Bütünleşik sistemlere uygulanabilen ve içerik olarak daha stratejik yöntemler



Şekil 1.1 Analiz tekniklerinin sınıflandırılması (Meredith ve Suresh)

LAVELLE ve RIGGETT 1992’de karar analiz yöntemlerini üç grupta toplamıştır:

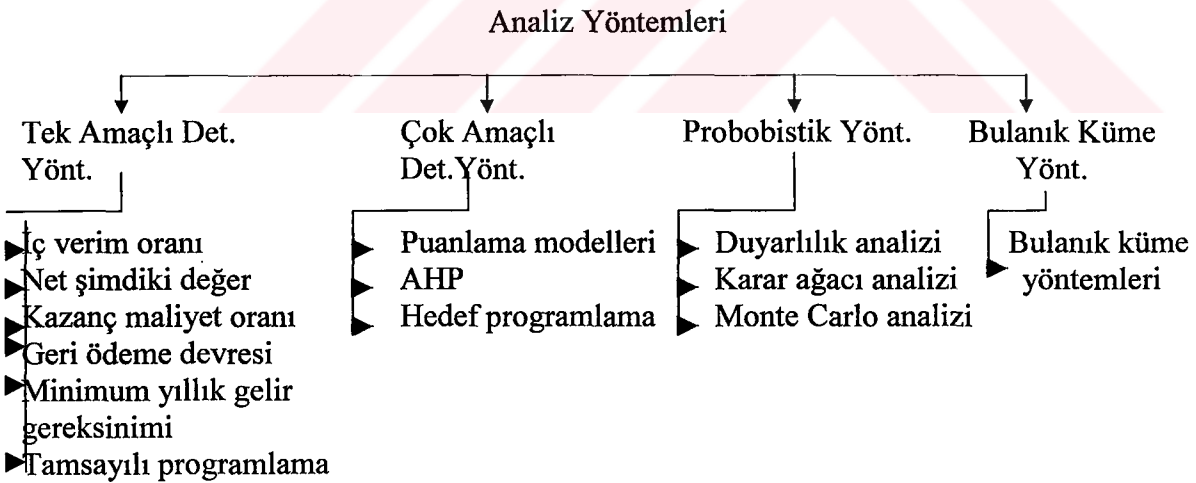
1. Muhasebe Yöntemler
2. Analitik Yöntemler
3. Stratejik Yöntemler



Şekil 1.2 Analiz tekniklerinin sınıflandırılması (Lavelle ve Riggett)

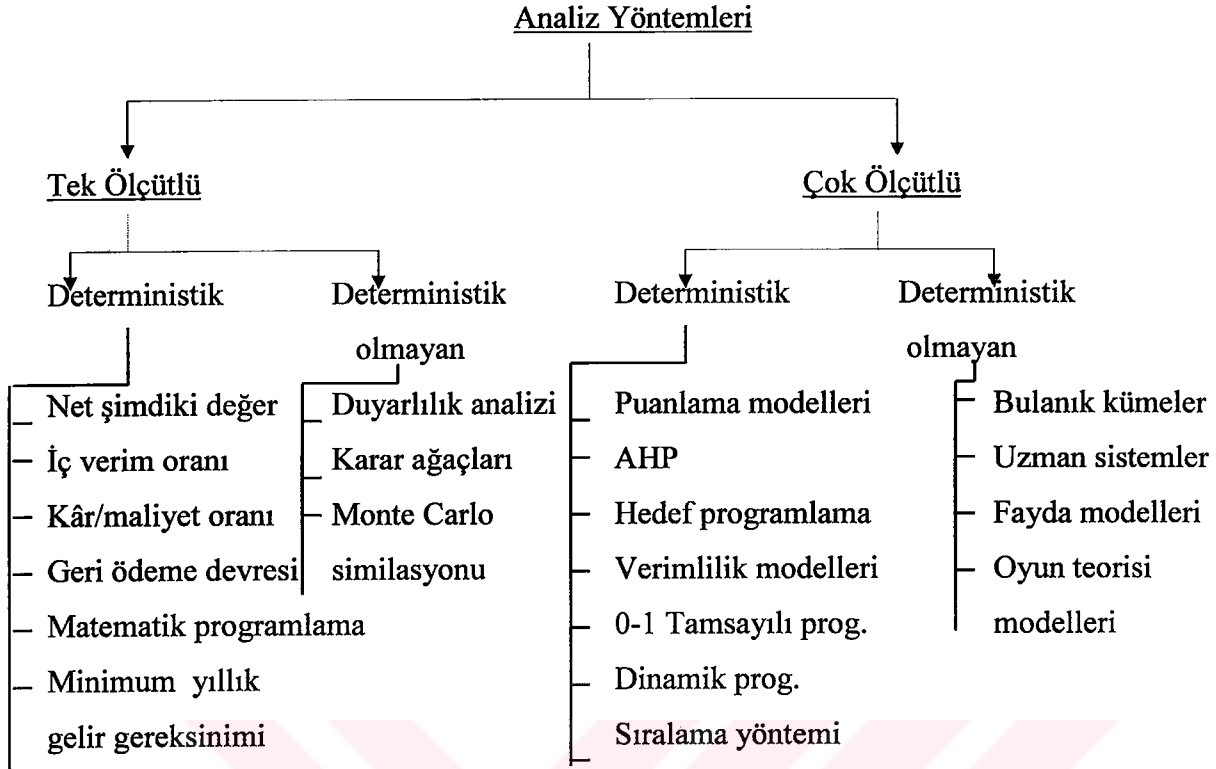
Soni ve diğerleri, bu planda mevcut analiz yöntemlerini dört gruba ayırmaktadır. Bu gruplar:

1. Tek amaçlı deterministik yöntemler
2. Çok amaçlı deterministik yöntemler
3. Probabilistik yöntemler
4. Bulanık küme yöntemleri



Şekil 1.3 Analiz tekniklerinin sınıflandırılması (Soni ve diğerleri)

KOLLI ve Diğerleri 1992’de mevcut analiz yöntemlerini iki gruba ayırmıştır. Tek ölçütlü ve çok ölçütlü yöntemler. Her iki büyük grup deterministik ve deterministik olmayan yöntemlere göre iki alt gruba bölünmüştür. Şekil 1.4’de araştırmacıların analiz yöntemlerini nasıl sınıflandırdıkları gösterilmektedir.



Şekil 1.4 Analiz tekniklerinin sınıflandırılması (KOLLI ve diğerleri)

Buradaki deterministik sistem, parçalar arasındaki etkileşimin tam olarak hesaplanabildiği sistemlerdir. Deterministik olmayan sistemler parçalar arasındaki etkileşimin tam olarak hesaplanamadığı sistemlerdir (Özarpacı, 1998, s:88).

2. ANALİTİK HİYERARŞİ YAKLAŞIMI

2.1.Giriş

Günlük yaşamda vermek zorunda kalınan kararların bir kısmı oldukça basit iken büyük bir bölümü ise üzerinde derinlemesine düşünmeyi ve irdelemeyi gerektirir. Savunulanan aksine, karar verme aşamasında mevcut olan karar teorilerinden yararlanıp, düşünce ve inançlarının doğruluğu irdelenmeye çalışılmamıştır. Kişiler kendi değer sistemlerini ve ne istediklerini tam olarak bildikleri inancında olduklarından başka birinin kendilerine ait düşünceleri düzenleyerek daha iyi karar verebileceğine inanmazlar. Buradan hareketle birçok bilim adamı tarafından çeşitli yöntemler ortaya atılmıştır. Bu yöntemler kişileri nasıl karar vermeleri konusunda analitik olarak düşünmeye zorunlu kılar. Bu şekilde kişi, hem sezgisel hem mantıksal etkilenmeyi en aza indirerek daha analitik ve matematiksel bir karar verme sürecini uygulayacaktır. Aynı zamanda yapılan araştırmalarda insanoğlu beyin kapasitesinin karmaşık kararları etkin ve sezgisel bir şekilde sentezini gerçekleştirmede yeterli olmadığı görülmüştür. Bu görüşler ile Prof. Thomas L. SAATY tarafından 1970’li yıllarda özel bir planlama problemini çözmek üzere Analitik Hiyerarşi Yöntemi (AHY) ortaya atılmıştır. Bu yöntem kişileri nasıl karar vermeleri konusunda zorunlu kılmak yerine, onlara kendi karar mekanizmalarını tanıma olanağı sağlayıp bu şekilde daha iyi kararlar vermelerini amaçlamaktadır (Golden, 1989).

Bu yöntem ile SAATY, karmaşık durumların analizi için matematiksel tabanlı bir teknik geliştirmiştir. Bilindiği gibi insanlar karar problemlerinde çok sayıda ve birbirleri ile ilişkili elemanlar kümesi ile karşılaştığı zaman, bunların tamamını kontrol edemeyeceğinden, bunların bir kısmını benzer özelliklere göre gruplandırarak kontrol etmeye çalışmaktadır. İşte AHY Yöntemi de, insan beyninin doğuştan sahip olduğu bu çalışma şeklini yansıtmaktadır. Yani Analitik Hiyerarşi Yönteminin temelde gerçekleştirmeyi amaçladığı, insanoğlundaki bu gruplara ayırmaya yönelik beyinsel faaliyet sürecini taklit ederek, söz konusu grupları sistemin belli bir seviyesinin öğeleri olarak oluşturmaktır. Bu karmaşık durumu oluşturan kontrol edilebilen ve edilemeyen elemanları (faktörleri) özelliklerine göre gruplandırıp bu gruplar da başka özellikler kümesine göre gruplandırıp sistemin bir üst seviyesini oluşturmakta ve bu süreç sistemin en üst seviyesini oluşturan genel amaca

ulaşana kadar devam etmektedir. Yapılan bu işlem daha sonra ayrıntılı olarak açıklanacak olan ve AHY'nin ilk aşamasını oluşturan sistemin hiyerarşik yapısını oluşturmaktır. Bu yapı, tüm faktörlerin ana hedeften kriterlere, alt kriterlere ve son olarak alternatiflere doğru uzanan bir sıralamayı içeren yapıdır.

Sonuçları belli olan karar seçeneklerinin değerlendirilmesinde kullanılan yöntemlerden birisi olan AHY hem kriterleri birbirleri ile karşılaştırdığı için, hem de bütün kriterlerin sonuç üzerindeki etkisini ortaya çıkarması açısından tercih edilmektedir.

2.2.Analitık Hiyerarşi Yaklaşımı (AHY)

Karar vericiler, çoğunlukla birbirleri ile karşılıklı ilişkileri olan elemanlardan (öğelerden) oluşan (hedef, kısıtlar, kaynaklar vb.) karmaşık yapılı bir sistemle karşı karşıya kalırlar. Bu tür durumlarda kişiler öncelikle sistemin yapısını anlamaya çalışırlar. Bu yapı ne kadar iyi anlaşılırsa, verilecek kararlar da o denli sağlıklı olacaktır.

AHY, karmaşık yapılı karar problemlerinde karar alternatif ve kriterlerine göre görelı (relatif) önem değerleri verilmek sureti ile yönetsel karar mekanizmasının çalıştırılması esasına dayanan birçok amaçlı karar verme yöntemidir (Timör, 1997).

Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı, sistem yaklaşımı ile yapısal olmayan sorunların modelini oluşturmada kullanılan ve amacı başaracak kriterlerin, amacı ne kadar iyi başaracağını ölçen bir yöntemdir. Bu yöntem eldeki verileri, düşünceleri veya sezgileri sayısal veya niteliksel olarak değerler, ölçer ve belli bir mantıksal oluşumla, hiyerarşik bir yapıda düzenler. Böyle bir yapıyla sistemin çeşitli unsurlarının tüm sistem üzerindeki etkisi değerlenirken, onların öncelikleri de elde edilmiş olur.

Burada sözü edilen sistem yaklaşımı bir sistemin çeşitli öğelerinin tüm sistem üzerindeki etkilerini değerlendirip onların görelı önemlerini bulmaya yöneliktir. Günümüzde sosyal bilimlere ve davranış bilimlerine ait problemlerde sistem yaklaşımının önemi daha iyi anlaşılmaktadır. Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının temelinde de sistem yaklaşımı yer almaktadır. Burada bir sistemde, onun yapısı ve işlevleri yani bileşenlerinin fiziksel, sosyal

yapısı, her bir bileşenin işlevi, hangi amacı gerçekleştirdiği, bu amaçların üst seviyedeki hangi amaç/amaçların parçası oldukları, sistemin esas amacının ne olduğu anlaşılmaya çalışılır. İşte AHY bu yapı- işlev ilişkisini bir bütün olarak ele alır. Burada Analitik Hiyerarşi sürecinin kullandığı hiyerarşiler, yukarıda sözü edilen sistemi oluşturan elemanların birbirleri ile olan işlevsel ilişkilerini ve tüm sistem üzerindeki etkilerini göstermek üzere oluşturulurlar.

Aynı yöntemin uygulanması sırasında, kişilerin birbirinden farklı kararlar verebildiği görülmüştür. Bunun nedeni insanların sahip olduğu inanç ve değer yargılarıdır. Bu farklılıklar sonucunda, farklı öncelikler (üstünlükler) ortaya çıkabilir. Çünkü sistemin bir elemanı bir kişi için birinci derecede önemli iken, diğer kişi için ikinci derecede, bir başkası için de üçüncü derecede önemli olabilir. Uygulanan metodlar aynı olsa bile, alınan kararlar tamamen öznel (kişisel)'dir. Bu nedenle insanoğlunun karmaşık bir problemle karşılaştığı zaman, problemi nasıl algılayıp, biçimlendirdiğini gözler önüne seren bu model de çeşitli gözlemler sonucunda görülmüştür ki, karmaşık yapıli karar problemlerinde elemanları gruplandırıp, hiyerarşik olarak parçalara ayırma kişiden kişiye değişebilir. Ancak kişiler bu problemi aynı şekilde yargılıyorlar ise, çözüm de yaklaşık olarak aynı olmaktadır.

Aynı zamanda günümüzde birbirinden farklı nesnelerin karşılaştırılamayacağına dair görüş ortadan kalkmıştır. Örneğin bir kiraz ve bir vişnenin birçok ortak özelliğı olabilir. Bunlar renk, tat, koku, boyut vb. Vişne belli bazı özelliklerinden dolayı, kiraz da başka birtakım özelliklerinden dolayı tercih edilebilir. Burada karar verici renk ve boyut özelliklerini dikkate almazken, tat özelliğine büyük önem verebilir. İşte Analitik Hiyerarşi Yöntemi de bu tür karşılaştırmalar ile günlük hayatta çok sık karşılaşıldığı ve bir matematiksel yaklaşımın kullanılmasının sözü edilen karşılaştırmayı kolaylaştıracağı düşüncesine dayanır (Saaty, 1988).

Karar problemlerinin yapılandırılması ve çözümünde kullanılan bu yöntemin en önemli özelliğı kompleks, çok kriterli, çok faktörlü, çok dönemli v.b. karar problemlerine uygulanabilir olmasıdır.

Burada anlatılanlardan görüldüğü gibi AHY'nin ilk adımı, karar probleminin ayrıntılı olarak ortaya konması ve hiyerarşik düzen dediğimiz ve her biri bir grup elemanlardan oluşan seviyeler halinde incelenmesidir. Bundan sonraki işlem ise oluşturulan hiyerarşinin en alt seviyesindeki elemanların en üst seviyede yer alan eleman üzerindeki göreceli etkilerini (önemlerini) belirlemek için hiyerarşinin her seviyesindeki elemanlar (değişkenler) arasındaki üstünlük (öncelik=priority) karşılaştırmalarının yapılması, bu karşılaştırma değerlerinin yer aldığı ikili karşılaştırmalar matrisinin oluşturulması, bir sonraki adım ise özdeğer ve özvektörlerin hesaplanması, karşılaştırma matrisinde tutarlığın kontrol edilmesi ve son olarak da her seviye elemanı için belirlenen öncelik vektörünün tüm hiyerarşi için karma öncelikler vektörünün (genel öncelik vektörünün) elde edilmesi ve karar probleminin çözülmesidir.

Bu adımlar daha detaylı akış diyagramı ile Bölüm 2.11'de gösterilecektir.

Analitik Hiyerarşi karar yaklaşımı, genel olarak iki aşamada gerçekleşmektedir; bunlar hiyerarşik yapıyı oluşturma (hierarchy design) ve değerlendirme (evaluation)- (Vargas, 1990).

Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı (Analytic Hierarchy Process), Analitik Hiyerarşi ve Proses diye üç temel kavram sayesinde kolaylıkla anlaşılacaktır.

Analitik: Analitik Hiyerarşi Yönteminde en azından sayılar kullanılır. Daha iyi anlamak ve/veya bir seçimi diğer seçeneklere göre tanımlamak için matematiği kullanmanın çok geçerli sebepleri vardır. Bu nedenle karar verme işlemine yardımcı olan tüm metodlar analitiktir, çünkü bu metodlar matematiksel/lojik fikir yürütmeyi kullanmak zorundadır.

Hiyerarşi: Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı, karar probleminin daha iyi anlaşılması için problemin yapısını amaçlar (hedefler), bu amacı izleyen kademelerde kriterler, alt kriterler ve alternatifler şeklinde seviyelendirir. Karar problemlerinde öğelerin çokluğu ve birbirleriyle olan ilişkileri kişinin öğeleri kavramasını zorlaştırır. Böyle durumlarda sistemi, alt sistemlere parçalamak uygun bir yoldur. Literatürdeki yer alan örneklerdeki hiyerarşiler karmaşık bir yapıya sahiptir. Bu tür yapıya sahip olan hiyerarşilerde, karar verici hiyerarşiyi parçalara ayırmak sureti ile küçük kümelerle odaklanabilir ve daha kolay

karar verebilir. “Kişinin aynı anda yalnızca 7 ± 2 nesneyi karşılaştırabilir” ifadesini içeren “Miller Yasası” denilen yasa bu durumu destekler (Miller, G.A 1956).

Proses: Bilindiği gibi, bütün önemli konular tek bir aşamada sonuçlandırılmaz. Kişinin bir kararı verebilmesi ve düşünebilmesi için zamana ihtiyacı vardır ve bu kararı verebilmek için gerekli olabilecek yeni bilgilerin toplanması, eğer bir grup kararı ise tartışılması gerekir. İşte bir karar problemi öğrenme, tartışma ve kişinin önceliklerini gözden geçirmesi süreçlerini (proses) kapsar. Bu prosesi kısaltmak ve karar verme sürecine yardımcı olmak amacı ile Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı kullanılmaktadır (Golden, 1989).

2.3. Analitik Hiyerarşi Yaklaşımının Uygulama Alanları

AHY, uzun yıllar boyunca kamu sektörü ve özel sektördeki müşterilere yardım etmek ve gerçek yaşamdan alınmış kompleks karar problemlerini çözmek için kullanılmıştır. Bu metodun yaratıcısı olan T. SAATY 1970’li yıllardan itibaren pek çok alanda bu metodu kullanmıştır. Bunlardan başlıcaları Ortadoğu sorunu, Sudan’ın uçak alanlarının nakledilmesi için bir sistem geliştirme, savunma sistemi, elektrik kuruluşları için tahmini yük ve oranlar, bir memlekette asit yağmurlarının hareketini önceden haber verme, savaş oyunları için karar desteği, bir şehir gelişmesinde bir finans endüstrisi için iş stratejisi geliştirme gibi çeşitli alanlarda uygulanmış ve başarıya ulaşılmıştır.

Günümüzde de özellikle politik ve ekonomik kararlar alınırken üst düzey yöneticileri bu yönetime sık sık başvurur. AHY’nin kullanım alanlarını şu şekilde sıralayabiliriz:

İşletme Organizasyonu İle İlgili Karar Verme Sorunları

- Reklam kampanyaları
- Müşteri İlişkileri
- İşgücü ve Terfi Kararları
- İşveren İlişkileri
- Fizibilite
- Pazarlama
- Satın Alma - Leasing Kararları

İşletme Yönetimi İle İlgili Karar Verme

- Stratejik Planlama
- Kazanç Arttırma Planları
- Ortaklık Kurma
- Pazarlama
- Yeni Ürün Geliştirme
- Ürün Hayat Eğrisi Analizi

İşletme Fonksiyonları İle İlgili Karar Verme Sorunları

- Stratejik Planlama
- Yeni Ürün Geliştirme
- Ürün Hayat Eğrisi Analizi
- Satış Gücünü Teşvik Planları
- Talep Değerlendirme
- Hukuki Kararlar
- Zaman Planlaması
- İşe Alma- İşten Çıkarma
- Sağlık - Eğitim Planlaması

Milli Politikalar - Hükümet Kararları

- Stratejik Planlama
- Nükleer Silahsızlanma Anlaşmaları
- Bütçe Düzenleme
- Uluslararası Krizler
- Destek Olma - Karşı Çıkma Kararları
- Fizibilite
- Askeri Kararlar

Halk Yönetimi (Federal ve Yerel)

- Kaynak Belirleme
- Politik Kararlar
- Talep Değerlendirme
- Uygulanabilir Projeler
- Yasal Kararlar

- Bütçe Düzenleme (Sipahi, 1998).

2.4.Hiyerarşiler ve Tipik Hiyerarşi Örnekleri

Karar vermede en yaratıcı iş, karar için önemli olan faktörleri (kriterleri) seçmektir. Karmaşık yapıli problemlerde karar verme sırasında yapılması gereken, sistemin elemanlarının birbirleri ile olan ilişkilerini ve sistemin tamamına yaptıkları etkilerini analiz etmektir. Yani sistemin genel yapısını kısaca ifade etmektir. Burada sistemin elemanları özelliklerine göre gruplarına ayrılır ve ayrı ayrı gruplarda bir başka özellikler kümesine göre gruplandırılıp bu oluşan grupları da tekrar bir başlık altında toplamak mümkündür. Bu oluşturulan grup, sistemin bir üst seviyesini teşkil eder. Bu yapılan seviye en üst seviye yani sistemin amacını ifade eden tek bir başlığa ulaşana kadar devam eder. İşte oluşan bu yapıya hiyerarşi denir. Oluşturulan hiyerarşinin her bir basamağı seviye (=level) aynı zamanda da düzey, katman, derece, kademe olarak da adlandırılır.

Diğer bir deyişle bir problem için hiyerarşik yapının oluşturulmasında temel adım; büyük ölçekli bir sistemin alt sistemlere bölünmesidir. Bu bölünme sistemin ana hedefinden en iyi analizi yapılabilen ve en fazla kontrol edilebilen faktörlere kadar yapılmaktadır. Bu faktörlerin (kriterlerin) belirlenmesinden sonra karar sonucunda ortaya çıkacak alternatifleri etkileyen tüm kriterler sıralanmış olur. Burada yapılan ayrışım yapılacak ölçümün esas bir parçasıdır.

AHY'da ilk adım, bir amaçtan birbirini izleyen seviyelerdeki kriter, alt kriter ve alternatiflere doğru hiyerarşik yapı içerisinde değişkenleri (faktörleri, elemanları) düzenlemektir.

Hiyerarşik yapı oluşturulurken hiyerarşiye dahil edilecek değişkenler:

- Mümkün olduğu kadar problemi tam olarak temsil etmeli.
- Problemi etkileyen tüm yan faktörleri yani problem çevresini dikkate almalı.
- Çözüme katkı sağlayan konu ve nitelikleri belirlemelidir (Süer, 1993).

Herhangi bir karar durumunun modellenmesinde kullanılan AHY, en az iki kademeli hiyerarşik yapı için uygun olur.

Hiyerarşi bir karar ağacı değildir. Hiyerarşideki her seviye, problemin farklı bir dilimini temsil eder. Örneğin; bir seviye sosyal faktörleri temsil ederken diğer seviyeler politik faktörleri veya her ikisinin karşılıklı etkilerini gösterebilir. Karar verici sistemin bir veya daha fazla kısmı üzerinde önemli noktaları kuvvetlendirmek veya üstünlüklerini göstermek açısından sisteme bazı seviye ve değişkenler ilave edebilir veya çıkarabilir.

Kurulan hiyerarşi her seviyede aynı önem derecesine sahip olan konuların değerlendirilmesinde karar vericiye yardımcı olur ve böylece homojen elemanların doğru olarak karşılaştırılmasına yardımcı olabilir.

Ancak bu oluşturulan hiyerarşilerin kesin olarak doğru olduğunu söyleyemeyiz. Çünkü farklı insanlar aynı karar problemi için farklı hiyerarşiler oluşturabilirler. Bu kurdukları hiyerarşilerin doğru olduğuna ilişkin sebeplerini söyleyebilirler. Burada asıl önemli olan, bu öznel kararların sistematik bir hale getirilmesidir.

Karar verici için bir sistemi hiyerarşik olarak yapılandırırken şu sorular önemlidir:

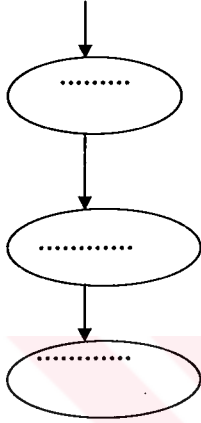
- 1- Sistemin fonksiyonlarını hiyerarşik olarak nasıl yapılandıracağız?
- 2- Hiyerarşideki herhangi bir elemanın etkisini nasıl ölçeceğiz? (Saaty, 1988).

Buradaki 2nci sorunun cevabını ileriki bölümlerde vereceğiz.

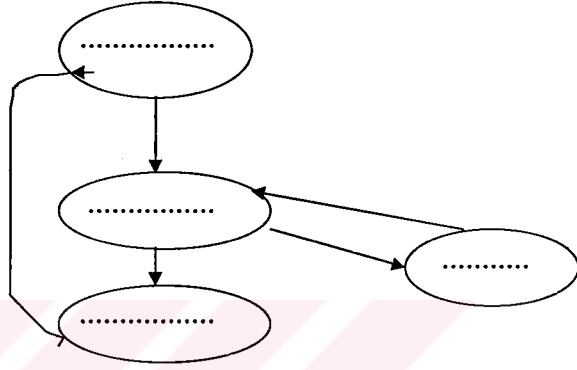
Aslında hiyerarşi özel bir sistem tipidir ve ortaya çıkarılan elemanların ayrı ayrı diziler şeklinde gruplandırılacağı ve bir gruba ait elemanların diğer gruptaki faktörleri etkileyeceği varsayımına dayanır. Öyle ki; bu gruplandırmada bir grubun elemanları yalnız bir grubu etkileyebilir ve aynı zamanda bir grubun elemanları yalnız bir grubun elemanları tarafından etkilenebilir. Hiyerarşik yapıda bir seviyeye ait elemanlar ise birbirinden bağımsız kabul edilir.

En basit hiyerarşi bir seviyeye bir elemandan bitişik seviyeye bağlayan lineer (doğrusal) hiyerarşilerdir. Doğrusal hiyerarşik yapı hedeften-alternatiflere olan yönelmeyi ifade eder.

Buraya kadar anlatılan hiyerarşik yapıda aynı seviyeye elemanlarının birbirleri ile olan ilişkileri gözardı edilmekteydi. Ancak gerçek hayatta çoğu zaman aynı seviye elemanları birbirleri ile ilişki içerisinde bulunurlar. Bu durum hiyerarşik yapılanmanın özel bir durumu olan şebeke (network) ile ifade edilir. Bu non-lineer hiyerarşik yapıların oluşturduğu feedback sistemler (geri beslemeli sistemler) ile ilgili kavramlar ve örnekler Bölüm 4'te verilecektir.



Şekil 2.1 Bir lineer hiyerarşik yapı



Şekil 2.2 Bir non-lineer hiyerarşik yapı

Şekil 2.1 ve 2.2'de gösterilen $A \rightarrow B$ ifadesi, A, B'yi basandır veya B, A'ya bağlıdır anlamına gelir.

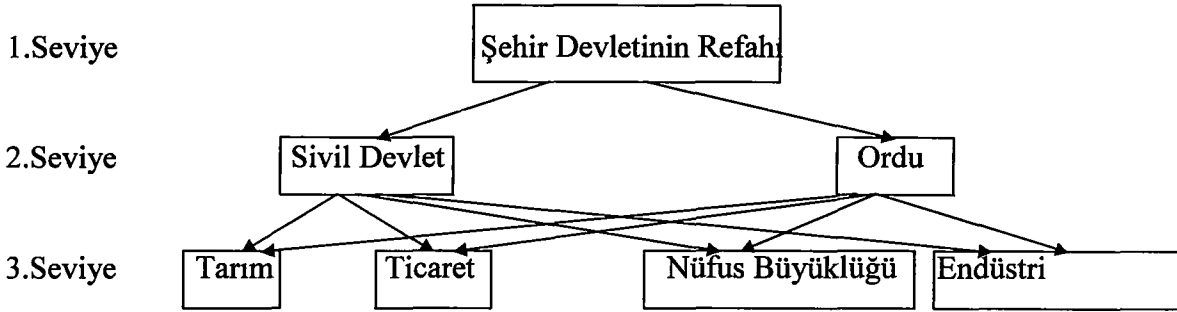
Şekil 2.2'deki gibi non-lineer hiyerarşilerin network gösterilişlerinde iki tür bağıllık vardır. Bunlar iç bağıllık (inner dependence) ve dış bağıllık (outer dependence)'dir.

Aynı seviye elemanları arasındaki etkileşim iç bağıllık, farklı seviye elemanları arasındaki etkileşim ise dış bağıllık olarak adlandırılır (Saaty, 1987).

Buraya kadar hiyerarşi ve hiyerarşik yapının oluşturulmasına ait bilgiler verildi. Aslında temel sorun hiyerarşik yapı belirlendikten sonra en alt seviyedeki her bir faktörün en üst seviyeyi nasıl etkileyeceğidir. Tüm bu faktörler düzgün dağılmadığı için bunlar arasında önceliklendirme yapılması gerekir. İşte bu amaçla, herhangi bir faktörün etkilerini saptamak için bir ölçüm tekniği gereklidir. Bu ölçüm tekniği ile ilgili olarak Bölüm 2.6'da ölçme ve karar verme süreci irdelenmiştir.

2.4.1. Tipik hiyerarşi örnekleri

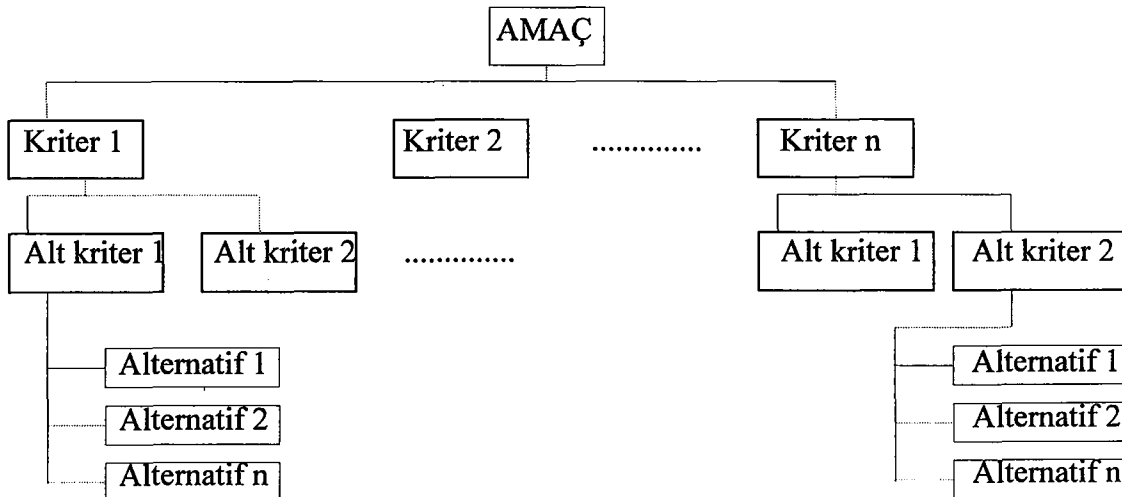
Hiyerarşi konusundaki en basit örnek Ortaçağ Avrupasında yer alan şehir devletleridir. Ortaçağ Avrupasında şehir devletlerinin refahı ordu ve sivil devletin özelliklerine bağlı idi. Bu basit hiyerarşi örneği Şekil 2.3'te gösterilmiştir.



Şekil 2.3 Ortaçağ Avrupasındaki şehir devletleri ile ilgili bir hiyerarşi örneği

Şehir devletlerinin ekonomik gücünün temel öğeleri tarım, ticaret, nüfus büyüklüğü ve endüstrisi olmasından dolayı aynı seviyede gösterilmiştir. Bu dört öğe sivil devlet ve orduyu belirler ve aynı zamanda da şehir refahı üzerinde etkilidir. Bu hiyerarşi, üç seviyelidir (Saaty, 1988).

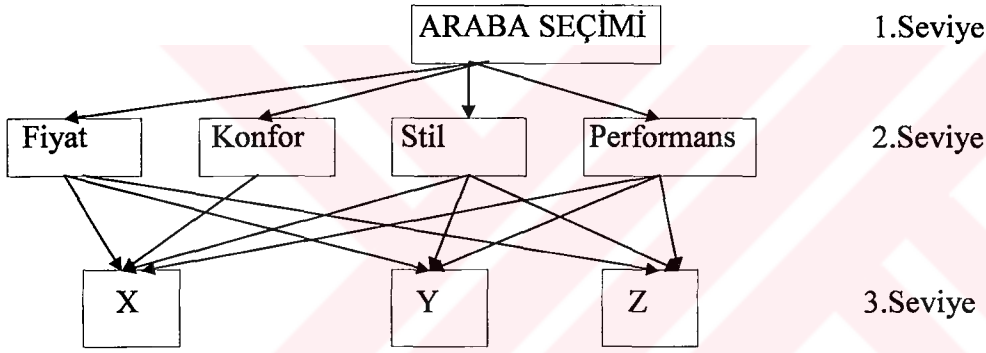
Seviyelerde amaç, kriterler, alt kriterler, alt-alt kriterler ve en son olarak da alternatiflerin yer alması ile oluşan genel bir hiyerarşik yapı Şekil 2.4'te gösterilmiştir.



Şekil 2.4 Genel hiyerarşi modeli

Bu konuda verilebilecek en basit ve anlaşılır örnek, araba seçimi örneğidir. Örnek problem, sınırlı bütçe ile araba satın almak isteyen bir kişinin, üç çeşit araba arasından en uygun olanı tercih etmesidir. Burada araba seçimi ana hedefi oluşturmaktadır.

Sözü edilen kişinin araba satın alırken başlıca dört kritere dikkat ettiği varsayılmıştır. Bu kriterler fiyat, konfor, stil, performans'tır. Kişi bu kriterleri dikkate alarak üç arabadan (X,Y, Z arabasından) birini seçmek durumundadır. İlk aşama problemin hiyerarşi halinde gösterilmesi olacaktır. Bu hiyerarşik model Şekil 2.3'te gösterilmiştir. Bu şekilde de görüldüğü gibi birinci seviyede ana hedef araba seçimi, ikinci seviyede ise fiyat, konfor, stil ve performans kriterleri ve son seviyede ise her kritere göre kıyaslanacak olan alternatifler yani araba çeşitleri yer almaktadır.



Şekil 2.5 Araba seçim örneği hiyerarşisi

Kriterlerden konfor kriteri, kişi için arabanın iç dizaynı, müzik tertibatı, arabaya giriş ve çıkışların kolay olması, koltuk ayarları özellikleri gibi faktörleri kapsamaktadır.

Fiyat kriteri ise, arabanın alış fiyatını esas alarak ölçülendirme yapılmasıdır. Fakat karar verici kişinin kendi kişisel tercihi, verilecek kararı etkileyebilir. Örneğin X arabası Y arabasından 500 Milyon daha pahalı ise, bu fark herhangi bir kişi için çok önemli bir tutar değil iken, bir başkası için son derece önemli olabilir. Bu olay kişinin maddi durumuna bağlı olarak söyleyebileceği kişisel (öznel) bir yaklaşımdır. İşte AHY'nin bir faydası da bu gibi durumlarda kişisel yargılara geniş yer vermesidir.

Stil kriteri ise, arabanın dış görünüşünü yani estetiğini belirtmede kullanılmıştır.

Performans ise, arabaların galon başına kat ettikleri mesafe gibi özelliklerin oluşturduğu mekaniksel özelliklerdir.

Ayrıca bu hiyerarşiyi incelediğimizde fiyat ve performans kriterlerinin diğer iki kriterden farklı olduğu görülür. Çünkü bu kriterler bir ölçüt ile belirlenebilmesine karşın, stil ve konfor kriterleri hiçbir sayısal bilgi yansıtmadıklarından bunlar hakkında somut bir ölçüt vermek zordur.

2.4.2. Hiyerarşi kurmanın avantajları

- (1) Bir sistemin hiyerarşik gösterimi, üst seviyelerdeki önceliklerin değişiminin alt seviyelerdeki elemanlar üzerindeki etkisini açıklamada kullanılabilir. Problemin temel elemanları olan amaçlar, kriterler ve alt kriterler ve alternatifler belirlenmiş olur. Böylece karmaşık bir problemin çözümünde önemli bir ilerleme sağlanır.
- (2) Hiyerarşiler, bir sistemin alt seviyelerinin fonksiyon ve yapısı ile ilgili detaylı bilgi verir ve üst seviyelerdeki elemanları ve amaçları hakkında genel bir görünüş sağlar. Bir seviyedeki elemanlara yapılan tesir (baskınlık) bir üst seviye ile en iyi şekilde gösterilir. Yani alt seviyelerdeki elemanların detaylandırılması, hedefin gerçekleşmesi için gerek ve yeter koşuldur.
- (3) Hiyerarşik olarak düzenlenmiş doğal sistemlerin değerlendirilmesi, modüler yapılı bu sistemlerin bir bütün olarak değerlendirilmesinden daha verimli sonuçlar sağlar.
- (4) Hiyerarşiler kararlı ve esnektir; Küçük değişiklikler küçük etkilere neden olduğu için hiyerarşiler kararlıdır ve oldukça iyi kurulmuş bir hiyerarşiye yapılacak ilavelerin performansı bozmayacağından dolayı da hiyerarşiler esnektir (Saaty, 1988).

2.5. AHY'nin Temel Aksiyomları

AHY'nin başlıca temel aksiyomları şunlardır:

Aksiyom 1: (Reciprocal comperation = karşıt, ters karşılaştırma)

Karar verici, A alternatif kümesindeki herhangi iki i ve j alternatifi (veya alt kriteri) için C kriter kümesindeki herhangi bir c kriteri altında a_{ij} ikili karşılaştırmalarını

$$a_{ij} = \frac{1}{a_{ji}} \text{ (Tüm } i, j \in A \text{ için)}$$
 olacak şekilde yapılabilmektedir.

Aksiyom 2: (Homogenalty = homojenlik)

Karar verici, A alternatif kümesine ait herhangi iki i ve j alternatifini karşılaştırırken herhangi bir C kriteri altında birini diğerine göre sonsuz derecede iyi olarak değerlendiremez. Yani

$a_{ij} \neq \infty$ (Tüm $i, j \in A$ için) dir.

Aksiyom 3: (Expectations)

Karar problemi beklentilere cevap verecek şekilde bir hiyerarşi olarak formüle edilebilmelidir.

Aksiyom 4: Mevcut karar problemini etkileyen her bir kriter ve alternatif hiyerarşide gösterilmek zorundadır. Diğer bir deyişle, karar vericilerin tüm sezgileri kriter veya alternatif olarak yansıtılmalıdır (Golden, 1989).

Birinci aksiyomda, anlatılmak istenen eğer bir karar verici bir şeyin başka bir şeyden 5 kez daha önemli olduğunu düşünüyorsa, bunun tersinin de doğru olduğunu kabul etmekte olduğudur.

İkinci aksiyom ise, çok önemlidir. Sonsuz tercihler bu yöntemde yasaklanmıştır. Zaten böyle bir durumda problemin sonucu önceden belirlidir ve karar verme konusunda da hiçbir yönetime ihtiyaç duyulmayacaktır. Yani kısaca tercihlerin belirli (sınırlı) ölçeklerle gösterilmesi gerektiğini anlatmaktadır.

Üçüncü aksiyom ise, her karar probleminin lineer hiyerarşi şeklinde ifade edilemeyeceğine dikkat çekmektedir.

Dördüncü aksiyom ise, önemli olan her bir kriter veya alternatifin hiyerarşiye dahil edilmesi gerekliliğinden bahsetmektedir. Buradaki asıl amaç ise AHY'de farklı sayıda

alternatif ile (probleme ait bir kriterin unutulması halinde) çok farklı bir çözüm sıralaması elde edilebilmesi olasıdır.

Yukarıdaki aksiyomlara göre, Aksiyom 3 ve Aksiyom 4, problemi hiyerarşik olarak ifade etmeyi ve çözmeyi, Aksiyom 1 ve Aksiyom 2 ise ikili karşılaştırmalar şeklindeki kararları ortaya çıkarmayı tarif eder (Vargas, 1990).

2.6. Ölçme ve Karar Verme Süreci

Burada AHY'nin kullandığı ölçüm tekniği basit bir örnek ile açıklanacaktır. Kişiyi elle kaldırabileceği fazla ağır olmayan bir dizi nesne verildiğini varsayalım. Bunların ağırlıklarını ölçmek için, alet olmadığı takdirde ilk akla gelen yöntem, bu nesneleri tek tek alıp ağırlıklarının tahminlerini yapmaktır. Bu şekilde her birinin tahmin edilen ağırlıklarını, bunların toplam tahmini ağırlıklarına bölme ile bu nesnelerin göreceli (relatif) ağırlıkları hesaplanır.

Bunun dışında bir başka yöntem de bu nesneleri ikişer ikişer karşılaştırmaya dayanır. Bu ikinci yöntem her seferinde salt iki nesneyi karşılaştırıp birbirleri ile nasıl bir ilişki içinde olduklarını saptamaya yöneliktir. Bu yöntem oldukça basittir fakat, uzun sürede gerçekleşir.

Aslında yapılan hiçbir ölçüm türü tutarlılık için garanti veremez. Tüm ölçümlerde, ölçüm aletleri ile yapılanlar da dahil olmak üzere deneysel hata ya da ölçme aleti hatası olabilir. Bu da tutarsızlık ortaya çıkarır. Örneğin bir ölçüm hatası sonucu A, B'den B de C'den daha ağır ise, burada buna karşın C'nin A'dan daha ağır olduğu kanısına varılabilir. Bu hata özellikle A, B ve C'nin ağırlıklarının birbirine yakın olması ve kullanılan ölçme aletinin yeterince hassas olmamasından kaynaklanır. Bazı problemlerde tutarsızlık çok önemli olabilir. Buna kimya ile ilgili olan bir ilaç yapımı örneği verebiliriz. İki kimyevi maddeden birinin diğer maddeye göre daha fazla oranda konulması ve kullanılması ilacın canlılara zarar vermesine yol açabilir. Bu örnekte olduğu gibi ölçümlerde tam olarak tutarlılığı yakalamak zordur. Karar teorilerinde de tutarlılık çok önemlidir.

Bu nedenle karar problemlerinin sonucunda verilen kararın tutarsızlığının, ilgili problemde ne derece kötü olduğu araştırılmalıdır. Yani problemlerin çözümlerinde mutlaka tutarlılık, tutarsızlık tespit edilmelidir.

Burada sözü edilen tutarlılıkların anlamı, yalnızca tercih geçişlerindeki mantıklılık değildir. (Örneğin elmanın (X), portakala (Y) tercih edilmesi ve portakalın (Y), muza (Z) tercih edilmesi durumlarından elma (X), muza (Z) tercih edilir.) Aynı zamanda bu tercihlerin gerçek yoğunluklarına ilişkin sayısal tutarlılık da vardır. Örneğin; elma (X) , portakala (Y) iki kez daha fazla tercih ediliyor, portakal (Y) muza (Z) üç kez daha fazla tercih ediliyor ise sayısal tutarlılık olması için elma (X), muza (Z) 2×3 yani 6 kez daha fazla tercih edilmesi gerekir. İşte bu açıklanan durum tercihlerin kuvvetinde sayısal tutarlılık diye adlandırılır.

AHY, seçeneklerin ikili karşılaştırılmasında tutarsız olup olunmadığı ile değil, problemde tutarlılık varsayımından sayısal olarak sapma derecesi ile ilgilenir.

Tutarlılık ve bir ölçümün gerçeği ne kadar yansıttığı konusunda aralarında bir ilişki olmasına ihtiyaç yoktur. Genellikle, kişi durum hakkında ne kadar çok şey biliyorsa, onu yansıtmada o kadar tutarlıdır. İkili karşılaştırmalar ise, kişinin soruna ilişkin olabildiğince bilgi kullanıp tutarlılığını artırmasına yardımcı olur. Bir kişi mükemmel bir kararlılığa sahip olabilir, fakat gerçek hayata ilişkin sorunlarla ilgisi olmayabilir.

Gerçek soruna karşılık gelecek çözümleri bulabilmek için şunları varsayalım:

- (1) Fiziksel gerçekçilik karardır.
- (2) Karar, tutarlılığı elde etmek için çabalamaktır. Tutarlılık ulaşılmaya çalışılan amaçtır. Gerçeği yakalamak için gerekli, ama yeterli değildir. Bireyin gerçek dünyadaki duruma karşılık gelmeyen çok tutarlı fikirleri olabilir. Tutarlılık, somut (gerçek) ölçümlerde, kararlarda ve düşünülen yöntemde bir sorundur.
- (3) Gerçeği daha iyi tahmin etmek için hislerimizi, inançlarımızı, izlenimlerimizi karar vermeyi sağlayıcı sistematik bir yola kanallıze etmeliyiz. Amaç nesnelliği (objectivity) artırmak, öznelliği (subjectivity) azaltmaktır.
- (4) Hislerimizden iyi sonuçlar elde etmek için;

- (a) Sayısal bir ölçek bulmak
- (b) Nitel yargılarımız ile bu sayılar arasında güvenilir bir ilişki kurmak
- (c) Fizik ve ekonomiden bilinen gerçek ölçümlere benzetilebilmeli
- (d) Bulduğumuz sonuçlarda ne denli tutarsız olduğumuzu ölçebilmemiz

gerekir (Saaty, 1988).

AHY, metodun kullanılmasında konu ile ilgili kişiler ile yüz yüze anket yapıp onların ikili karşılaştırmalara ait görüşlerinin alınmasını önermektedir. Bu seçilen kişiler uzman kişiler olmasalar bile, o konu hakkında az da olsa bilgi sahibi kişiler olmalıdırlar. Eğer verilecek karar bir grup kararı ise o zaman her grup üyesi kendi ilgi alanına giren konuya ait kararlar ortaya koyup birbirlerini tamamlayabilirler, hem de diğerlerinin kararlarını oluşturması sırasında olaya karışıp kararların netleşmesini sağlayabilir. Eğer grup, karar aşamasında uzlaşmaya varır ise hiçbir sorun çıkmaz. Aksi taktirde, yani uzlaşma sağlanmadığı zaman pazarlık süreci başlayacaktır. Gerekli görüldüğünde üçüncü şahıslardan yararlanıp farklı sonuçların bir sentezi veya çıkar çatışması olan gruptaki her bir üyeden olaya bir kendi, bir de çıkar sahipleri açısından bakması istenir. Sonuçlar saptanıp diğerlerinin elde ettiği sonuçlarla karşılaştırılabilir. Böylece işbirlikçi bir karara ulaşılabilir.

2.7.Seçeneklerin Önceliklendirilmesi

Bu yöntem, problemin hiyerarşik olarak modellenmesinin sonucunda karar vermede etkili olabilecek problemdeki tüm elemanları ayrı ayrı değerlendirip karar vermemize imkan sağlar. Bu karar verme işlemi elemanları ikiye ikiye ele alıp, onları salt bir kritere göre değerlendirmekte ve bu işlem sırasında diğer kriterleri göz önüne almamaktadır (Yolal, 1998).

Burada hiyerarşik yapıda bir dizi soru- cevap sonucunda her seviye elemanları arasında oluşturulan ikili karşılaştırmaların göreceli üstünlüklerinin (önemlerinin) tespiti aslında önceliklendirme işlemidir. Bu işlemde temel amaç, elemanların göreceli önemlerinin tespiti ve bu önemlerin genel hedefe olan etkisini belirlemektir. Bu işlem sırasında karşılaşılan sorunların en önemlisi, ikili karşılaştırmaların sonuçlarının değerlendirileceği skalanın

(ölçek değerlerinin) belirlenmesidir. Bu nedenle ikili karşılaştırmalar için bir skalanın (ölçeğin) tanımlanması gerekir.

2.7.1. Ölçek oranları

Bu karşılaştırma işleminde standart ölçekler kullanılır. Bunun nedeni, ölçüm skalalarında kullanılan rakamların yorumlanmasındaki karmaşıklığı gidermektir. Aynı zamanda standart ölçekler, ölçümlerden elde edilen rakamlar arasındaki ilişkiyi sağlamakla birlikte keyfi olarak seçilen skalalardan oluşabilecek pekçok hatayı en aza indirebilir.

Verilen bir standart ölçekteki sayısal hesaplamalar, içinde bulunulan duruma göre farklılık gösterir. Basit bir problemle karşı karşıya kalındığında herhangi bir basit ölçekle sayısal hesaplamalar yapabilmek için bir kural yoktur. Yapılan sayısal ölçümler farklı skalalarda farklı anlam taşıyabilir. Bu durumlarda kullanılan standart ölçekler karar vericilerin ikili karşılaştırmalar matrisini oluşturmasında ve bu ölçümün ne anlama geldiğini anlaması açısından kolaylık sağlar.

Analitik Hiyerarşi Yönteminde yapılan tüm ölçümler tekdüze bir öncelik skalasına aktarılmaktadır. Sözü edilen öncelik skalası her farklı ölçüm için, o ölçümün genel amaç üzerindeki tercih ve önemlerinin sıralamasına dayanır. Bu yöntemde Thomas SAATY tarafından ortaya atılan ve AHY’de kullanılan ölçek değerleri Çizelge 2.1’de gösterilmiştir.

Çizelge 2.1 Ölçek Değerleri

Önem Derecesi	Sınıflandırma	Açıklama
1	Eşit önemde	İki faaliyet amaca eşit olarak katkı sağlar.
3	Orta derecede önem	Bir faaliyet değeri üzerinde bir miktar daha fazla önemli olduğu karar
5	Kuvvetli düzeyde önem	Bir faaliyetin değeri üzerinde kuvvetli bir biçimde hakim olduğu karar
7	Çok kuvvetli düzeyde önem	Bir faaliyet güçlü bir şekilde tercih edilir ve baskınlığı uygulamada görülmektedir.
9	Mutlak önem	Bir faaliyetin değeri üzerindeki üstünlüğü en yüksek ihtimal derecesindedir.
2,4,6,8	İki yakın karar arası. orta değer	Uzlaşma zamanında gereklidir.

Burada ölçek değerlerine bakıldığı zaman, en üst ölçeğin neden “9” olduğu sorulabilir. Daha önceden sözünü ettiğimiz temel aksiyomlar konusunda Aksiyom 2’de, sonsuz dışında herhangi bir sayı üst limit olarak kullanılabilir. Fakat yapılan araştırmalar 9 sayısının en uygun üst limit olduğunu göstermektedir (Saaty, 1988). Çünkü yapılan incelemelerle psikologlar, insan beyninin kısa süreli bellek kapasitesi ve bunları özümleme kabiliyetinin yaklaşık olarak yedi nesne (7+2) ile sınırlı olduğunu belirlemişlerdir.

Bu sözü edilen ölçek oranlarının etkin olduğu, yapılan pekçok uygulama sonucunda hem de diğer başka ölçekler ile teorik olarak karşılaştırmalar sonucunda görülmüştür.

2.7.2. Göreli üstünlükler

Bu kısımda ikili karşılaştırma kavramının uygulanması ve önceliklendirme tekniği ile ilgili bir örnek ve bu konuya ait bilgiler verilecektir.

$A_1, A_2, A_3, \dots, A_n$, diye adlandırılan n tane çakıлтаşı olduğunu varsayalım. Bunların ağırlıkları sırası ile $W_1, W_2, W_3, \dots, W_n$ olsun. Her taşın diğerlerine göre ikili karşılaştırmaları ile elde edilen göreli ağırlıkları A ikili karşılaştırmalar matrisinin satırlarını oluşturacaktır. Buradaki göreli ağırlıklar, karşılaştırılan ikililerden daha hafif olanını birim olarak alıp, diğer taşın onun kaç katı ağırlıkta olduğunu ölçülmesidir. Burada çakıлтаşlarının ağırlıklarının bilindiği varsayılmaktadır. Bu A_1 ve A_2 çakıлтаşlarının ağırlıklarını karşılaştırmak için, A_1 çakıлтаşının ağırlığı $W_1 = 305$ gram ve A_2 çakıлтаşının ağırlığı $W_2 = 244$ gram olarak ölçülmüş olsun. Buradan $W_1 / W_2 = 1.25$ olarak bulunur. Bu bulunan değerle “ A_1 çakıлтаşı, A_2 çakıлтаşından 1.25 kat daha ağırdır.” kararına varılır. Ve $a_{12} = 1.25$ ile gösterilir. Bu durum ölçümlerin tam ve ideal durumudur. Yani, W_i ağırlıkları ile a_{ij} kararları arasındaki ilişkiye baktığımız zaman (2-2)’de gösterilmiş olan pozitif ve simetrik A matrisi oluşur.

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2-1)$$

ve A ikili karşılaştırmalar matrisi

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & \dots\dots\dots A_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} W_1/W_1 & W_1/W_2 & \dots\dots\dots W_1/W_n \\ W_2/W_1 & W_2/W_2 & \dots\dots\dots W_2/W_n \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ W_n/W_1 & W_n/W_2 & \dots\dots\dots W_n/W_n \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (2-2)$$

Çakıltaşı örneğine geri dönersek, $a_{12}=1.25$ olarak bulunduğuna göre $a_{21}= 1/1.25$ olacağı mantıksal olarak bulunabilir. Eğer A_1 çakıltaşı A_2 çakıltaşından 1.25 kat daha ağır ise, A_2 çakıltaşı A_1 çakıltaşından $1/1.25$ 'i katı kadar ağırlığa sahiptir.

Yukarıda yazılan A matrisi tüm a_{ij} 'ler için w_i/w_j 'ye eşit, pozitif ve $a_{ji}= 1/a_{ij}$ reciprocal (= karşıt, ters) özelliğine sahip değerler olacaktır.

Bu durumda A ikili karşılaştırmalar matrisi düzenlenirse son şekli aşağıdaki gibi olur.

$$A = \begin{matrix} & \begin{matrix} A_1 & A_2 & A_n \end{matrix} \\ \begin{matrix} A_1 \\ A_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ A_n \end{matrix} & \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \dots\dots\dots a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \dots\dots\dots a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \dots\dots\dots 1 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

↓
Degerler

↓
Reciprocal (= Karşıt, Ters) Değerler

A matrisi tutarlıdır, çünkü

$$a_{jk} = \frac{a_{ik}}{a_{ij}} \quad (i, j, k= 1,2,\dots,n) \quad (2-3)$$

ifadesi sağlanır. Ama gerçek hayatta bu tutarlılık ilişkisi tamamen sağlanamaz. Bu sebeplerden birincisi fiziksel ölçüm imkanı olsa bile, matematiksel anlamda tam doğru olmaması, ikincisi ise insan kararlarındaki yanılmalardır.

A matrisindeki i'nci satırı göz önüne aldığımızda

$a_{i1}, a_{i2}, a_{i3}, \dots, a_{ij}, \dots, a_{in}$

ve

$$\frac{W_i}{W_1}, \frac{W_i}{W_2}, \frac{W_i}{W_3}, \dots, \frac{W_i}{W_j}, \dots, \frac{W_i}{W_n} \quad (2-4)$$

değerlerinin birbirine eşit olduğu durumlarda, bu satırdaki birinci elemanı w_1 , ikinci elemanı w_2 ile benzer şekilde diğerlerini de çarptığımız zaman

$$\frac{w_i}{w_1} \cdot w_1 = w_i, \quad \frac{w_i}{w_2} \cdot w_2 = w_i, \dots, \quad \frac{w_i}{w_j} \cdot w_j = w_i$$

şeklinde eşitlikler elde edilecektir. Sonuç aynı elemandan oluşan $w_i, w_i, \dots, w_i, \dots, w_i$ satırıdır. Ancak genel durumda ise söz konusu değerler tam olarak w_i 'ye eşit değil, onun civarındadır. Bu nedenle w_i 'yi bu değerlerin ortalamasına eşitlemek daha mantıklı olacaktır. Dolayısı ile (2-1) ideal durumu yerine, yani

$$w_i = a_{ij} \cdot w_j$$

yerine, daha genel bir durumu yansıtan

$$w_i = \text{ortalama} (a_{i1}w_1, a_{i2}w_2, \dots, a_{in}w_n)$$

veya

$$w_i = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n a_{ij} w_j \quad (i,j= 1,2, \dots, n) \quad (2-5)$$

eşitliği kullanılacaktır. a_{ij} 'nin iyi tahmin edilmesi halinde bu değer gerçekten w_i/w_j 'ye yakın bir değer olacaktır. Aksi halde a_{ij} 'nin ideal durumdan sapması halinde de bu (2-5)'teki denklemin uyum sağlaması için n 'nin değişmesi gerekir (Saaty, 1988).

2.8.İkili Karşılaştırma Matrisi ve Çözümü

AHY'de model kurulduktan sonra, aynı hiyerarşi seviyesindeki faktörler göreceli (relatif) ağırlıkları belirlenir. Bu işlem daha önce söylediğimiz gibi bir üst seviyedeki faktörle bağlantılı olan alt seviyedeki faktörlerin (elemanların), kendi aralarında yapılacak ikili karşılaştırmaları şeklinde gerçekleştirilir.

Bu ikili karşılaştırmalar karar vericinin bizzat kendisi tarafından yapılacağı gibi, bazen de konu ile ilgili olarak kendisi ve bir uzman grup tarafından birlikte yapılabilir. Bu ikili karşılaştırma işlemi yöntemin temelini oluşturur.

Burada daha önceki araba seçimi örneğini göz önüne aldığımızda karar vericiden iki sorunun cevaplandırılması istenir:

- 1- Karar vericinin amaçladığı “araba seçiminde” fiyat, konfor, stil, performans kriterlerinden hangisi daha önemlidir?
- 2- Önem derecesi nedir?

Karar vericini birinci soruya cevap ararken genel amaç üzerinde dört kriterin etkisini ikili olarak karşılaştıracak ve sıraya koyacaktır. Ancak ikinci sorunun cevabı ise bu önem (öncelik) sırasının sayısal hale dönüştürülmesidir. Bu dönüşüm de bizim Çizelge 2.1’deki değerleri kullanarak yapılacaktır.

Bu elde edilen değerler bir matris şeklinde gösterilir. Bu matrise ikili karşılaştırma matrisi, karar matrisi veya öncelik matrisi adı verilir. Araba seçimine ait örnekte fiyat, konfor, stil, performans kriterlerinin nasıl kurulduğunu görelim. Araba seçimi amacına etki etmesi açısından fiyat kriterinin konfor kriterine göre önemi 1’den 9’a kadar olan rakamla derecelendirilir. Örneğin Çizelge 2.9’daki matriste fiyat ve konfor eşit derecede önemli ise $X_{FK}=1$, fiyat konfordan kesinlikle çok daha önemli ise $X_{FK}=9$ olacaktır.

A ikili karşılaştırmalar matrisinin mevcut özelliğine göre

$$X_{ij} = 1 \quad \text{ve} \quad X_{ji} = 1 / X_{ij}$$

olacaktır.

Çizelge 2.2 Araba seçimi örneğine ait ikili karşılaştırma matrisi

Araba Seçimi	1. Fiyat	2. Konfor	3. Still	4. Performans
1.Fiyat	1	X_{FK}	X_{FS}	X_{FP}
2.Konfor	$1/X_{FK}$	1	X_{KS}	X_{KP}
3.Still	$1/X_{FS}$	$1/X_{KS}$	1	X_{SP}
4.Performans	$1/X_{FP}$	$1/X_{KP}$	$1/X_{SP}$	1

X_{FK} : Matriste fiyat ve konfor kriterlerinin önem derecesidir.

AHY, bir seviyenin tüm öğeleri ile bir üst düzeydeki tek bir ögenin veri olarak alınması ve alt düzeydeki tüm öğelerin üst düzey üzerindeki göreceli etkileri açısından ikili karşılaştırılıp, yukarıda verilen matrise benzer bir matrisin oluşturulması ve bu matrisin en büyük özdeğere sahip özvektörünün bulunmasına dayanır. Bu ikili karşılaştırmalar matrisi problemi oluşturan her seviye ve seviyelerde yer alan kriterler için tek tek hazırlanır. Asıl amaç alternatiflerin genel önceliklerini yani genel sıralamasını ortaya çıkarmaktır. İşte bu öncelikler vektörünün oluşturulması aşağıda söyleyeceğimiz gibi özvektör hesaplamalarına dayanır.

Kriterlerin birbirlerine göre önem dereceleri yani öncelik (ağırlık) vektörü, kriterler için oluşturulan karar matrisinin özvektörlerinin bulunması ve bunların en büyüğünün özdeğer olarak alınması ile elde edilir. Her bir kriter için bir alt seviyesini oluşturan alternatiflerin ikili karşılaştırmalar matrisinden bu kriterlerin özvektörleri (öncelik vektörü) elde edilir. Bu öncelik vektörlerinin oluşturduğu matris, bir üst seviyede olan kriterlerin ağırlık vektörleri ile çarpılarak en üst seviyede olan amaç için genel öncelik vektörü (ağırlık vektörü) bulunur (Saaty, 1988).

2.8.1. Özvektör hesaplaması

AHY çözüm algoritması özvektör hesabına dayanmaktadır. Özvektörlerin hesaplanması için dört yöntem geliştirilmiştir.

- En Basit Yöntem

Matrisin her satırında yer alan elemanlar toplanır ve bulunan satır toplamları, her bir satıra ait satır toplamlarının birbirine eklenmesi ile elde edilen toplam değere bölünerek normalize edilir. Elde edilen vektörün ilk elemanı ilk faaliyetin göreceli önemini, ikincisi ise ikinci faaliyetin göreceli önemi verir. Yani elde edilen sütun vektörü şeklindeki bu sayılar matristeki öncelikleri belirleyecektir.

- İyi Yöntem

Matrisin her bir sütundaki elemanlarının toplamı alınır ve bu toplamın tersi ($1/\text{sütun toplamı}$) hesaplanır. Her bir sütun için bulunan bu değerler toplanır. Bu sayıların

toplamını bir yapmak için yani normalize etmek için, her bir eleman sırasıyla tersi alınmış sütun toplamalarının birbirine eklenmesi ile elde edilen sayıya bölünür.

- Daha İyi Yöntem

Her sütunun elemanları o sütunun toplamına bölünür. Elde edilen değerlerin satır toplamı alınır ve bu toplam o satırdaki eleman sayısına bölünür. Yani normalize edilmiş sütunların ortalamasının alınması işlemidir.

- En İyi Yöntem

Matrisin her bir satırında yer alan n eleman birbiri ile çarpılır ve çıkan sonucun n . Dereceden kökü alınır. Elde edilen değerler normalize edilir (Saaty, 1988).

AHY'ni kullanarak karar verme konusunda kişilere yardımcı olmak amacıyla birçok bilgisayar paket programı geliştirilmiştir. Bunların başlıcaları;

Expert Choice (Windows)

Aliah THINK (PC/Windows)

Criterium Decision Plus 20 (PC)'dir.

Özvektörlere ait genel bilgiler EK 1'de verilmektedir.

2.9. Tutarlılık ve Bir Özvektör Olarak Önceliğin Tutarlılıkla İlişkisi

Tutarlılık, Analitik Hiyerarşi Yönteminin en önemli kavramlarından birisidir. Verilen kararların güvenilirliği, karşılaştırmalar matrisi kurulurken yapılan değerlendirmelerin tutarlılığı (consistency) ile yakından ilgilidir. Tutarlılık, ikili karşılaştırmalar sonucunda oluşan değerlerin yani önceliklerin birbirleri ile olan mantıksal ve/veya matematiksel ilişkisidir (Candan, 1999).

Daha önce Bölüm 2.6'da verdiğimiz çakıldaşı örneğine döndüğümüz zaman, A_1 çakıldaşı A_2 çakıldaşına göre 1.25 kat, A_2 çakıldaşı da A_3 çakıldaşından 1.50 kat daha ağır ise, A_1 çakıldaşı A_3 çakıldaşından 1.25×1.50 kat daha ağırdır. İşte bu mantıksal tutarlılıktır.

Matematiksel olarak bu tutarlılık A ikili karşılaştırma matrisinin elemanları cinsinden;

$a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk}$ olarak tanımlanır.

Bu ikili karşılaştırmalar yoluyla oluşan matrislerin her yerinde tutarlılık beklenmez. Ayrıca çoğu zaman geçişsizlik söz konusudur. Örneğin, A_1 'in göreceli önemi A_2 'den; A_2 'nin göreceli önemi de A_3 'den büyük ise, A_1 'in önem ilişkisi A_3 'ten daha büyük olmayı gerektirmez. Bu insan kararlarında ortak bir durumdur. Bir başka örnek de, tutarsızlık veya tercihlerin geçişsizliğinin eksikliği olarak ortaya çıkabilir. Örneğin C_1 takımı, üçüncü bir C_3 takımına yenilen bir başka C_2 takımı karşısında kaybedebilir, fakat C_1 takımının C_3 takımını yenmesi de mümkündür. İşte bu takımlardaki davranışlar tutarsızdır. Bu model içten geçişsizlik gerektirebilir (Saaty, 1988).

Bir hiyerarşide herhangi bir seviyenin elemanları $A_1, A_2, \dots, A_n$ gibi n değişken ile gösterilsin ve bu değişkenlerin bir üst seviyedeki elemanlara olan etkilerinin ağırlıkları $W_1, W_2, \dots, W_n$ olsun. Burada W_i vektörlerinin bulunması istenir ve kullanılan temel araç, ikili karşılaştırmaların oluşturduğu matristir. Bu kısımda öncelikleri bulma işleminde niçin en büyük özdeğer ve özvektörü bulma işleminin yapıldığı anlatılacaktır.

A_i 'yi A_j ile karşılaştırdığımızda A_i 'nin A_j 'ye göre kuvveti a_{ij} ile gösterilsin. $A=(a_{ij})$ matrisi idi. Yine bu matrisin $a_{ji}=1/a_{ij}$ özelliğine sahip olması, bir reciprocal matris (=karşıt matris) olduğunu gösterir. Eğer yapılan tüm karşılaştırmalar tutarlı ise daha önce söylediğimiz gibi

$$a_{ik} = a_{ij} \cdot a_{jk} \quad \text{veya} \quad a_{ik} = a_{ik} / a_{ik} \quad (\text{tüm } i, j, k \text{ için})$$

dir. Bu şartı sağlayan matrise “tutarlı (consistency) matris” denir.

Bir tutarlı matriste açıkça görülür ki, yapılan karşılaştırmalar ile gerçek ölçüler birdir. Böylece $W_1, W_2, \dots, W_n$ değerleri bilinmektedir. Buradan

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad i, j = 1, 2, \dots, n \quad (2-6)$$

böylece

$$a_{ij} \cdot a_{jk} = \frac{w_i \cdot w_j}{w_j \cdot w_k} = a_{ik} \text{ 'dir.}$$

Aynı zamanda

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \cdot \frac{1}{w_i} = \frac{1}{w_j} \text{ 'dir.}$$

Buradan oluşan matris denkleminin genel şekli

$$A.X = Y \quad (2-7)$$

olacaktır. Bu (2-7) denklemi $X=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ ve $Y=(y_1, y_2, \dots, y_n)$ ile aşağıdaki yazılmış olan (2-8) denkleminin genel şeklidir.

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}.x_j = y_i, \quad i=1,2, \dots, n \quad (2-8)$$

(2-6) eşitliğini kullanarak

$$a_{ij} \frac{w_j}{w_i} = 1 \quad i,j=1,2, \dots, n \quad (2-9)$$

ve sonuç olarak

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}.w_j \cdot \frac{1}{w_i} = n \quad i=1,2, \dots, n \quad (2-10)$$

veya

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}.w_j = n.w_i \quad i,j=1,2, \dots, n \quad (2-11)$$

olur. Bu durumda

$$A.w = n.w \quad (2-12)$$

elde edilir. Bu gösterim

$$\begin{bmatrix} w_1/w_1 & w_1/w_2 & \dots & w_1/w_n \\ w_2/w_1 & w_2/w_2 & \dots & w_2/w_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ w_n/w_1 & w_n/w_2 & \dots & w_n/w_n \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} n w_1 \\ n w_2 \\ \vdots \\ n w_n \end{bmatrix} = n \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ \vdots \\ w_n \end{bmatrix} = n w$$

şeklinde ifade edilir.

(2-12)'deki n , A matrisinin özdeğeri, w ise özdeğerle ilişkisi olan özvektördür ve n ,

$$\det (A-\lambda I)=0 \quad (2-13)$$

eşitliğini sağlamalıdır.

Burada verilen kararlar kişilerin verdiği kararlar olduğu için a_{ij} ölçümleri doğru ölçümlerle aynı olmayabilir. Böylece a_{ij} oranı w_i/w_j ideal oranından uzaklaşabilir ve (2-12) denklemi geçersiz kalacaktır. Bunu geçerli kılmak için matris teorisinden yararlanılır.

Eğer $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, değerleri $Ax = \lambda x$ denklemini sağlayan sayılar ise yani A matrisinin özdeğerleri ise ve tüm i 'ler için $a_{ii}=1$ ise özdeğer tanımı gereği, bir matrisin özdeğerlerinin toplamı o matrisin izine eşittir. Bir matrisin izi, matrisin köşegenleri üzerindeki elemanların toplamına eşittir. A matrisinin izi n 'dir. Yani

$$\sum_{i=1}^n \lambda_i = \text{iz}(A) = n \quad (2-14)$$

dir.

$n \times n$ boyutunda olan A matrisinin özel yapısından dolayı rank 1'dir. Çünkü matristeki tüm satırlar birinci satırın bir katına karşılık gelmektedir. Matrisin $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ özdeğerlerinden birisi dışında diğerleri sıfırdır. Bu özdeğer $\lambda_{\max}$ ile gösterilir. (2-14) denkleminde $\lambda_{\max}=n$ elde edilir. Buradan çıkan sonuç ise A matrisi tutarlı ise n , A 'nın en büyük özdeğeridir.

Burada ikinci bir durum ise, bir karar belirlendikten sonra otomatik olarak onun karşısı (reciprocal) transpoze durumunda girilir. Pozitif reciprocal olan A matrisinin a_{ij} elemanlarında küçük miktarlarda değişim olursa Bu durum özdeğerlerde de küçük değişikliklere (=perturbations) yol açar.

Bu sonuçlardan A matrisinin köşegen üzerindeki elemanları 1 ($a_{ii}=1$) ve matris tutarlı ise, o zaman a_{ij} 'deki küçük değişimler $\lambda_{\max}$ ile gösterilen bu en büyük özdeğeri n'ye yaklaşıır. Geriye kalan özdeğerler ise sıfıra yaklaşıır.

İşte bu verilen bilgilerden sonra problemimize geri döndüğümüzde, yukarıdaki sebeple özdeğerlerdeki değişimler olması halinde w ağırlık vektörünü tahmin etmek için (2-12) denkleminde n yerine $\lambda_{\max}$ değerinin bulunması gerekir. $\lambda_{\max}$ bulunduktan sonra bu matrisin özvektörü elde edilebilir. Özvektörler elemanlarının toplamı alınır ve her bir eleman bu toplama bölünerek normalize edilir. Böylece w vektörü elde edilmiş olur. Bu normalize edilmiş sonuç şu şekilde de

$$\alpha = \sum_{i=1}^n w_i \quad \text{ve} \quad w_i = \frac{1}{\alpha} w_i$$

ifade edilir.

Burada elde edilen

$$\sum_{i=1}^n W_i = 1 \text{ 'dir.}$$

Burada söz konusu özvektör öncelik sıralarının belirlenmesine, özdeğer ise tutarlılığın yani alınan kararların tutarlı olup olmadığının ölçülmesine yaramaktadır.

Burada hesaplanan w ağırlık (öncelik) vektörünün gerçek hesabının matrisin sonsuz kuvvetini alma yoluyla elde edileceği daha sonra Bölüm 2.10'da açıklanacaktır.

Tutarlılık için gerekli şart A matrisinin reciprocal (karşıt) değerlerinin olmasıdır.

A matrisinin tutarlı olması için gerek ve yeter şart A'nın en büyük özdeğerinin n'ye eşit olmasıdır. Diğer bir deyişle $\lambda_{\max}=n$ olmalıdır. A'nın yapısındaki tutarsızlık ne kadar fazla olursa $\lambda_{\max}$ n'den o kadar “uzaklaşır” fakat daima $\lambda_{\max} \geq n$ 'dir (Saaty, 1988).

Tutarlılık ölçüsü olarak;

$$T.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n - 1} \quad (2-15)$$

ifadesi tutarlılık indeksi (T.I.) olarak kabul edilir “tutarlılığa yakınlığın” göstergesidir. Tutarlılık indeksinin hesaplanması sözel olarak; ikili karşılaştırmalar matrisi elde edilen göreceli (relatif) öncelikler vektörü ile çarpılır ise yeni bir vektör elde edilir. Bu yeni vektörün ilk elemanı göreceli öncelikler vektörünün ilk elemanına, ikinci elemanı ikinciye v.s. bölünür ise bir üçüncü vektör elde edilir. Bu üçüncü son vektörün elemanları toplanıp, eleman sayısına bölünürse, en büyük özdeğer yaklaşımı için yaklaşık bir değer ($\lambda_{\max}$) bulunur. (2-15)'de yerine yazılarak T.I. hesaplanır.

Bu tutarlılık indeksi, $\lambda_{\max}=n$ olduğunda sağlanan tutarlılık (ideal durum) ile w_i/w_j oranlarının tahminindeki tutarlılıktan sapmaları verir.

Söz konusu tutarlılık indeksinin, random indeksine (tesadüfilik göstergesi) bölünmesi ile tutarlılık oranı (consistency ratio) elde edilir. Tutarlılık oranı T.O. ile gösterilir.

$$T.O. = \frac{T.I.}{R.I.} \quad (2-16)$$

Diğer bir deyişle, tutarlılık indeksinin sayısal kararlar 1/9, 1/8, ..., 1/2, ..., 9 gibi ölçeklerin rastgele olarak alındığında “olması gereken tutarlılık” indeksine bölünmesidir.

Random indeks, Saaty ve Marino tarafından 1-15 boyutundaki matrisler için belirlenmiştir.

Çizelge 2.3. Random indeks Çizelgesi

Matrisin Boyutu	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Random İndeks	0.0	0.0	0.58	0.9	1.12	1.24	1.32	1.41	1.45	1.49	1.51	1.48	1.56	1.57	1.59

Kabul edilebilir bir tutarlılık için, tutarlılık oranının (T.O.) 0,10 veya daha düşük olması gerekir. Bu durumda “W” ağırlığının tahmini “kabul edilebilir” bulunur. Yani karar verici verdiği kararlarda tutarlıdır. Bu oranın sıfıra eşit olması halinde ise karar vericinin kararları tümü ile tutarlıdır. Eğer bu değer 1’e yaklaşıyor ise karar verici kararlarında tutarsız yani matrisi rastgele bir şekilde belirlediği kabul edilebilir. Eğer bu oran 0.10’dan oldukça büyük ise karşılaştırma ile ilgili yeni verilerin sağlanması, verilerin tutarlılığın düzeltilmesi ve değerlendirilmelerinin yeniden gözden geçirilmesi istenir (Süer,1993).

2.10. AHY’nin Matematiksel Temelleri

Belli bir seviyedeki elemanların (öğelerin) bir üst seviye elemanı açısından relatif (görelî) önemlerini veya tercihlerini saptamak üzere oluşturulan $A=(a_{ij})$ matrisinin doldurulabilmesi için genellikle bu matrisin simetriklik özelliğinden yararlanılır. n tane elemanın bulunduğu hiyerarşide $n.(n-1)/2$ adet soruya cevap verilmesi yeterlidir. Matrisin diagonalı üzerindeki elemanlar 1 değerine sahiptir. ($a_{ji}= 1/a_{ij}$) Böylece karşılaştırmada baz alınan elemandan dolayı oluşacak farklılıkların engellenmesi sağlanacaktır.

Kısaca AHY, pozitif ve reciprocal (=karşıt) özelliği olan ikili karşılaştırmalar matrisinden, amaçların (kriterlerin veya alternatiflerin) bir kümesinin ağırlıklarının tahminini yapmaktadır. Yani tüm $i,j= 1,2, ..., n$ için $a_{ij}=1/a_{ji}$ olan

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & & a_{2n} \\ . & . & . & . \\ a_{n1} & a_{n2} & & a_{nn} \end{bmatrix}$$

matrisini kullanarak $w=(w_1, w_2, \dots, w_n)$ öncelikler veya ağırlıklar vektörünü hesaplamaktadır.

Önceden de belirttiğimiz gibi eğer kararlar mükemmel bir şekilde tutarlı ise, yani $a_{ik} \cdot a_{kj} = a_{ij}$ (tüm $i, j, k= 1, 2, \dots, n$) (2-17)

ise o zaman A'nın elemanları hata içermeyecek ve

$$a_{ij} = \frac{w_i}{w_j} \quad (\text{Tüm } i, j, k= 1, 2, \dots, n) \quad (2-18)$$

şeklinde ifade edilecektir.

(2-17) ve (2-18) denklemlerini kullanarak

$$a_{ik} \cdot a_{kj} = \frac{w_i}{w_k} \cdot \frac{w_k}{w_j} = \frac{w_i}{w_j} = a_{ij} \quad (\text{Tüm } i, k, k= 1, 2, \dots, n)$$

sonucu elde edilecektir. Burada esas sorunumuz, a_{ij} veri iken w_i değerlerini bulmak idi. Ancak bu ölçüm matematiksel anlamda kesin doğru değildir. Bu nedenle (2-18) eşitliğinin tam olarak sağlanması yerine belli bir sınırı aşmamak şartıyla birtakım sapmalara izin verilebilir. Bu nedenle w_i 'nin ortalama olarak ifade edilmesi daha akılcıdır.

Buradan

$$A \cdot w = n \cdot w \quad (2-19)$$

olacaktır, ancak a_{ij} 'nin idealden sapması halinde, a_{ij} 'deki idealden farklı duruma uygun bir şekilde w_i ve w_j 'nin değişebilmesi için n 'nin de değişmesi gerekir. Bunun için n yerine en büyük özdeğer olan $\lambda_{\max}$ kullanılır. (2-15)'teki yeni ifade

$$A \cdot w = \lambda_{\max} \cdot w$$

olacaktır. Bu genel ifade, A matrisinin bilinmesi halinde w'lerin aranmasında bu denklem kümesinin çözülmesi yeterlidir. Bu denklem çözümü n'nci dereceden bir denklemin $\lambda_{\max}$ için çözülmesi yolu ile bulunur ki, bu bir özdeğer bulma problemidir. Bu matrisin özel yapısından dolayı, A matrisinin tek özdeğeri olan $\lambda_{\max}$, matrisin boyutuna yani n'ye eşit olacaktır.

$$A.w = \lambda_{\max} . w = n.w \quad (2-20)$$

Yapılan karşılaştırmalarda hataların kaçınılmaz olduğunu belirtmiştik. Matristen elde edilen satır normalizasyonunun sonucu, hangi satırın seçildiğine bağlı olarak değişecektir. Bu tip durumlarda (2-20) denkleminin çözümünde Logaritmik Azalan Kareler (LLS) metodu ve Saaty'nin özvektör metodu sıkça kullanılmaktadır.

Bu çalışmada (2-16) denkleminde A'nın sağ esas özvektörü (Perron right vector) w ve $\lambda_{\max}$ maksimum özdeğeri (Perron root) "Saaty'nin özvektör metodu" kullanılarak hesaplanacaktır.

Yani

$$w_i = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij} . w_j}{\lambda_{\max}} \quad (\text{tüm } i, j, k= 1, 2, \dots, n)$$

şeklinde dir.

Özvektör metodu, alternatiflerin karşılaştırılmasının tüm olası yollarının ortalaması olarak verilen, w sonuç ağırlıkları ile bir basit ortalama proses olarak yorumlanabilir. Özvektör metodu, ağırlıkların hesaplanması için "doğal" bir metoddur.

Aynı zamanda özvektör metodu, tutarsızlık için bir doğal ölçü vermektedir. $\lambda_{\max}$ pozitif ve reciprocal matrisler için $\lambda_{\max} \geq n$ idi. Bu değeri kullanarak hesaplanan T.O., 0.1'den büyük ise karar verici kararlarında tutarsızdır. Bunun sonucunda da kararlarını tekrar gözden geçirip, düzeltilmesi gerekir.

Aslında sağ esas özdeğerin hesaplanması, w 'nin k -artan kuvvetlerini alma yolu ile bulunmaktadır. Sonuç, sistemin normalize edilmesiyle

$$W^k = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k \cdot e}{e^T \cdot A^k \cdot e} \quad (2-21)$$

olacaktır. Burada $e = (1, 1, \dots, 1)$ 'dir.

Örneğin araba seçimi örneğinde

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1/9 & 1/3 & 1/4 \\ 9 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 1/3 & 1 & 1/2 \\ 4 & 1/2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

karar matrisini ele alalım. $A^1 = A$ olacaktır. Eğer kişi her bir sütunu normalize ederse, ağırlıkların tahmini

$$\begin{bmatrix} 0,0588 & 0,0571 & 0,526 & 0,0667 \\ 0,5294 & 0,5143 & 0,4736 & 0,5333 \\ 0,1765 & 0,1714 & 0,1579 & 0,1333 \\ 0,2353 & 0,2571 & 0,3158 & 0,2667 \end{bmatrix}$$

Her bir sütunda ağırlıkların tahminleri farklıdır. Algoritmanın birinci iterasyonunun yukarıdaki elde edilenlere uygulanması ile

$$w^1 = \frac{A^1 \cdot e}{e^T \cdot A^1 \cdot e} = (0,05837 \quad 0,51675 \quad 0,16651 \quad 0,25837)$$

A matrisinin ikinci kuvvetini alırsak,

$$A^2 = A \cdot A = \begin{bmatrix} 4 & 0,4583 & 1,5 & 0,8889 \\ 35 & 4 & 13 & 7,79 \\ 11 & 1,25 & 4 & 2,4167 \\ 18,5 & 2,1111 & 6,8333 & 4 \end{bmatrix}$$

olur. Buradan ağırlıkların ikinci tahmini (2-21) denkleminde,

$$w^2 = \frac{A^2 \cdot e}{e^T \cdot A^2 \cdot e} = (0,05867 \quad 0,51196 \quad 0,15994 \quad 0,26943)$$

olur. Bu işleme devam edilirse,

$$w^3 = \frac{A^3 \cdot e}{e^T \cdot A^3 \cdot e} = (0,05882 \quad 0,51259 \quad 0,15958 \quad 0,26890)$$

$$w^4 = \frac{A^4 \cdot e}{e^T \cdot A^4 \cdot e} = (0,05882 \quad 0,51261 \quad 0,15971 \quad 0,26886)$$

$$w^5 = \frac{A^5 \cdot e}{e^T \cdot A^5 \cdot e} = (0,05882 \quad 0,51261 \quad 0,15971 \quad 0,26886)$$

O zaman proses, beş iterasyonda dengeye ulaşır.

$W=W^5$ gibi ağırlıkları hesap edilir; tutarlılık ölçümü ise

$$\lambda_{\max} = \left(\sum_{j=1}^4 a_{1j} / w_j \right) / w_1 = 4.01636$$

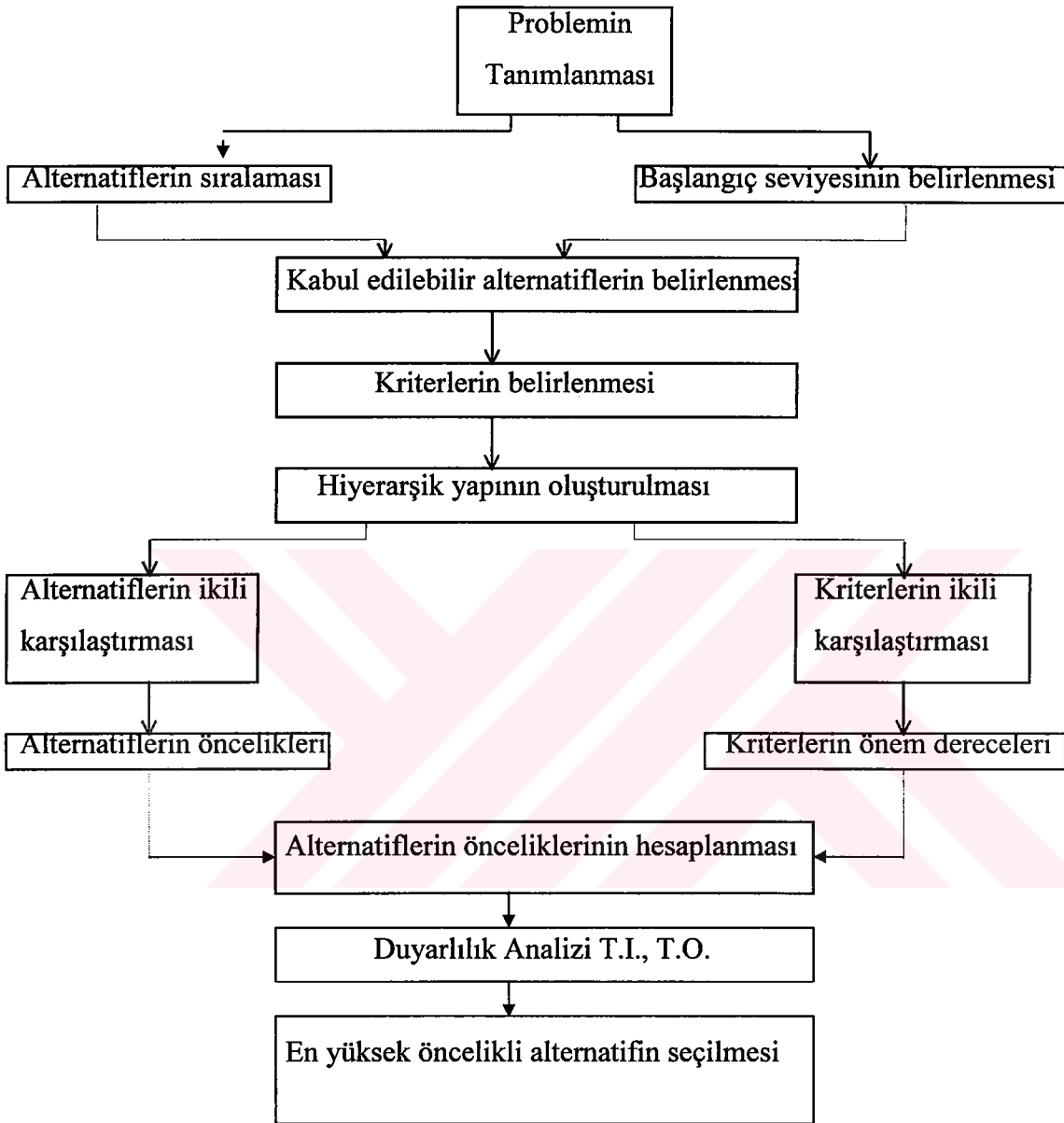
$$T.I. = (4.01636 - 4) / 3 = 0.0054667$$

$$T.O. = 0.0054667 / 0.90 = 0.006$$

$T.O. \leq 0.1$ yani $0.006 \leq 0.1$ olduğundan bu matris tutarlıdır (Golden, 1989).

Analitik Hiyerarşi Yöntemi beklenen cevabın oluşabilmesi için karar vericilere en uygun soruları sormak zorundadır. Yanlış sorular sorularak, anlamsız bir sonuç elde edilebilir. Çözümün bir kısmı da yöntemin kullanılmasıyla elde edilen tecrübeye dayanmaktadır. Diğer kısım ise mevcut sorulara verilen cevaplardan elde edilen sonuçların doğru yorumlanabilmesidir.

2.11. Analitik Hiyerarşi Yönteminin Algoritması

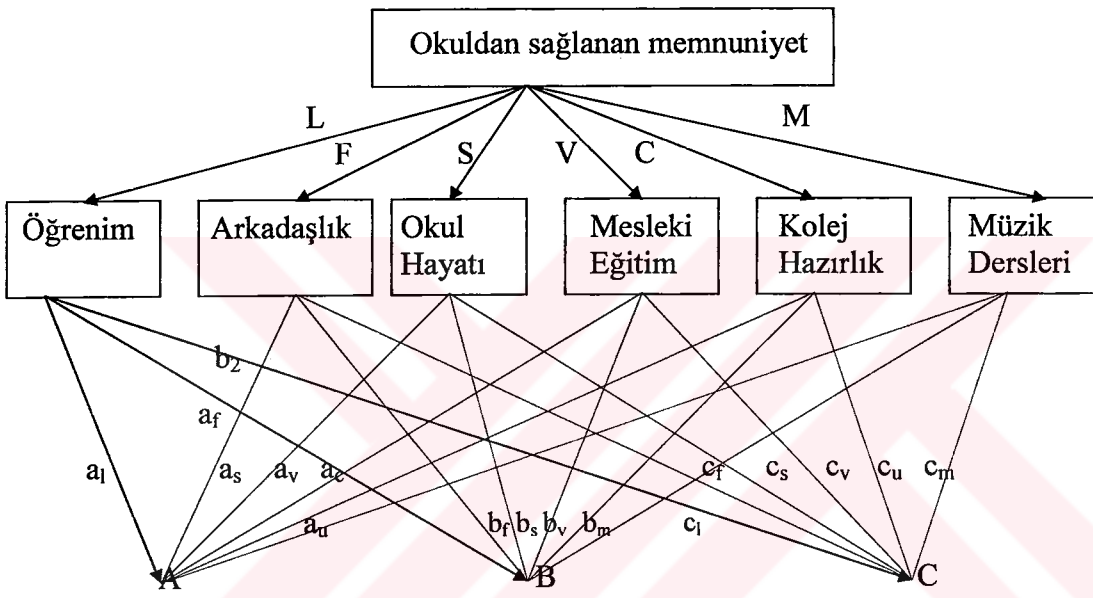


Şekil 2.6 Analitik hiyerarşi yönteminin çözüm aşamaları

Kaynak: SİPAHİ, Seyhan, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü, İşletme Fakültesi, Sayısal Yöntemler Ana Bilim Dalı, “Çok Amaçlı Karar Verme Teknikleri ve Bir Uygulama” Y.L.T. (İstanbul-1998)

2.12. Hiyerarşik Kompozisyon Prensibi

Bu prensibi bir örnekle açıklayalım. Bir öğrenci A, B, C gibi üç yüksekokul arasından bir tercih yapacaktır. Bu alternatiflere etki eden altı tane bağımsız kriter vardır. Bunlar öğrenim, arkadaşlık, okul yaşamı, mesleki eğitim, koleje hazırlık, müzik dersleri. Aynı zamanda alternatiflerden B okulu paralı, A okulu parasız, C okulu parasızdır. Bu probleme ait hiyerarşik yapı aşağıda Şekil 2.7’de verilmiştir.



Şekil 2.7 Okuldan sağlanan memnuniyetlik hiyerarşisi

Çizelge 2.4 Okuldan sağlanan memnuniyete göre kriterlerin karşılaştırılması

	Öğrenim	Arkadaşlık	Okul Hayatı	Mesleki Eğitim	Kolej Hazırlık	Müzik Dersleri
Öğrenim	1	4	3	1	3	4
Arkadaşlık	1/4	1	7	3	1/5	1
Okul Hayatı	1/3	1/7	1	1/5	1/5	1/6
Mesleki Eğitim	1	1/3	5	1	1	1/3
Kolej Hazırlık	1/3	5	5	1	1	3
Müzik Dersleri	1/4	1	6	3	1/3	1
$d_{\max} = 7.49$	T.I. = 0.30		T.O. = 0.24			

Burada kriterlerin hedefe göre karşılaştırılması sonucunda, kişi öğrenim ve mesleki eğitimi eşit öneme sahip olduğunu düşünerek “1” değerini vermiştir. Mesleki eğitim ile okul hayatını karşılaştırdığında, mesleki eğitim, okul hayatına göre kuvvetli derecede önemlidir. Bunun için Çizelge 2.1. ölçeklerinden “5” kullanılmıştır. Buradaki amaç hiyerarşik prensibini tanımlamak olduğundan yukarıdaki Çizelgeden hesaplanan $\lambda_{\max}$, T.I., T.O. değerlerinin bulunması Bölüm 2.16’da bir örnek ile izah edilecektir.

Çizelge 2.5 Altı kritere göre okulların karşılaştırılması

Öğrenim	A	B	C	Arkadaşlık	A	B	C	Okul Hayatı	A	B	C
A	1	1/3	1/2	A	1	1	1	A	1	5	1
B	3	1	3	B	1	1	1	B	1/5	1	1/5
C	2	1/3	1	C	1	1	1	C	1	5	1
$\lambda_{\max}=3.05$				$\lambda_{\max}=3.00$				$\lambda_{\max}=3.00$			
T.I. = 0.025				T.I. = 0				T.I. = 0			
T.O. = 0.04				T.O. = 0				T.O. = 0			
Mesleki Eğitim	A	B	C	Kolej Hazırlık	A	B	C	Müzik Dersleri	A	B	C
A	1	9	7	A	1	1/2	1	A	1	6	4
B	1/9	1	1/5	B	2	1	2	B	1/6	1	1/3
C	1/7	5	1	C	1	1/2	1	C	1/4	3	1
$\lambda_{\max}=3.21$				$\lambda_{\max}=3.0$				$\lambda_{\max}=3.05$			
T.I. = 0.105				T.I. = 0				T.I. = 0.025			
T.O. = 0.18				T.O. = 0				T.O. = 0.04			

Birinci matrisin öncelik vektörü (0.32 0.14 0.03 0.13 0.24 0.14) ve ona karşılık gelen özdeğer $\lambda_{\max}=7.49$ ’dur. $\lambda_{\max}$, tutarlılık değeri 6’dan biraz uzaktır.

Okulun genel önceliğini elde etmek için, yukarıdaki Çizelge 2.5 matrisini sağdan, kriterlerin ağırlık satır vektörünün transpozesi ile çarpılır. Bu, altı özvektörün her birimin bir önceki seviyede kendine karşı gelen karakterin önceliği ile ağırlıklandırılması ve sonra toplanması demektir. Buradan elde edilen sonuçlar;

$$A= 0.37$$

$$B= 0.39$$

$$C= 0.25$$

şeklindedir. Bu sonuçlara göre B okulunun seçilmesi gerekir. Ancak öğrenci A okulunu seçmelidir. Çünkü B okulu ile değerleri birbirine oldukça yakındır. Aynı zamanda B okulu paralı, A okulu ise parasızdır. Bu durum öğrencinin ailesine göre mali açıdan önemli bir problem olabilir. Bu nedenle ilk tercihi A okulu, ikincisi ise B okuludur.

Yukarıda anlatılan olayı, direkt Şekil 2.7'yi kullanarak açıklayalım. Eğer her bir kritere göre okulların ve kriterlerin ağırlıkları, şekilde her bir doğru parçası boyunca gösterilsin. O zaman;

$$A \text{ okulunun genel önemi} = a_l.L + a_f.F + a_s.S + a_v.V + a_c.C + a_m.M$$

$$B \text{ okulunun genel önemi} = b_l.L + b_f.F + b_s.S + b_v.V + b_c.C + b_m.M$$

$$C \text{ okulunun genel önemi} = c_l.L + c_f.F + c_s.S + c_v.V + c_c.C + c_m.M$$

Olarak yapılan hesaplamalar, aşağıdaki matris çarpımına karşılık gelmektedir.

							0.32 (L)
0.16(a _l)	0.33 (a _f)	0.45(a _s)	0.98(a _v)	0.25(ac)	0.69(a _m)		0.14 (F)
0.59(b _l)	0.33 (b _f)	0.09(b _s)	0.05(b _v)	0.50(b _c)	0.09(b _m)	x	0.03 (S)
0.25(c _l)	0.33 (c _f)	0.46(c _s)	0.17(c _v)	0.25(c _c)	0.22(c _m)		0.13 (V)
							0.24 (C)
							0.25 (M)

Aday okullarından elde edilen memnuniyetin ölçümünü keşfetmede, ilk olarak okulun karakterleri olan önemli kriterlerin listelenmesine ihtiyaç vardır ve adaylara bu kriterlerin relatif istekleri hesaplanır. Örneğin, bir öğrenciye arkadaşlık kurmak, kolej hazırlıktan daha cazip gelebilir. Şekilde kriterler L, F, S, V, C ve M ile gösterilmiştir.

Her bir okulun genel önemini (genel önceliği) oluşturmada ilk olarak, kriterlerin ağırlıkları ile her bir kritere göre bu okulların öncelikleri belirten ağırlıkları çarpmaya ihtiyaç vardır. Tüm kriterlere göre her bir okulun bu değerleri toplanır. Örneğin; A okulu için a_L.L okulda öğrenmenin relatif ağırlığıdır. Çünkü öğrenmenin relatif ağırlığı L'dir. a_L.L ise A okulu

için öğrenmenin genel ağırlığıdır. Benzer hesaplamalarla $a_f.F$, $a_s.S$, $a_v.V$, $a_c.C$, $a_m.M$ hesaplanır. Buradan A okulunun genel önemi, önceden hesaplanan aktivitelerin genel ağırlıklarının toplamıdır.

Yani

$$A = a_L.L + a_f.F + a_s.S + a_v.V + a_c.C + a_m.M$$

dir (Saaty, 1988).

Buradan okulların öncelikleri hesaplanırsa;

$$A = 0.40 \quad B = 0.36 \quad C = 0.25$$

olacaktır.

Kısaca bir $c \in C$ kriterine göre her bir $a \in A$ alternatifi için W_a^c ağırlıklarının kümesi üretildikten sonra, c kriterine ait öncelik (V_c) ile ilgili seçeneğin c kriterine göre önceliğinin (W_a^c) çarpımlarının, $c \in C$ 'ler üzerinden toplamı "hiyerarşik kompozisyon prensibi" olarak bilinir. Yani

$$W_a = \sum_{c \in C} V_c \cdot W_a^c$$

dir ve

Kısaca en alttaki elemanların en üst seviyedeki amaca etkilerini bulma şeklidir (Golden, 1989).

2.13.Kararların Düzeltilmesi (Revising Judgments)

Elde edilen tutarlılık indeksi kabul edilecek sınırların dışında kalırsa karar verici, kararları yeniden gözden geçirerek, kararların düzeltilmesi yoluna gider. Bu düzeltmeyi, nerede yapmamız gerektiği sorusu yöneltilebilir. Bunun cevabı iki farklı şekilde verilebilir. Birincisi w_i/w_j öncelik oranlarını kullanarak $[|a_{ij} - (w_i/w_j)|]$ mutlak fark matrisinde farkların en büyük olduğu satırlarda kararlarını düzeltmeye çalışmalıdır.

İkincisi ise, (w_i/ w_j) ve a_{ij} satırlarında ortalama karekök sapmasını (the root mean square deviation) hesaplayarak elde edilen en büyük sapmayı veren satırlarlarda kararlarını düzeltmeye çalışmalıdır.

İlk yöntemi kullanarak düzeltmeye devam edilirse, bu tekrarlayan yöntemle a_{ij} 'nin w_i/ w_j 'ye yakınsadığı görülür. Bunun için bu yöntem oldukça iyidir. Yöntem, satırlarda tüm a_{ij} 'lerin yerine karşılık gelen w_i/ w_j değerlerini koymaktan ve öncelik vektörünü tekrar tekrar hesaplamaktan ibarettir.

Bu işlemin tekrarı ile tutarlılık durumuna yaklaşıldığı görülmüştür. Örneklerde satırların kullanılarak aşağıdaki formülün sonuçları hesaplanabilir.

$$\max_i \sum_{j=1}^n |a_{ij} - (w_i/ w_j)|$$

Araba seçimi örneğine ait fiyat ile ilgili matris şu şekilde olsun.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 9 & 7 \\ 1/9 & 1 & 1/5 \\ 1/7 & 5 & 1 \end{bmatrix}$$

A matrisine ait öncelik vektörü

$(w_1, w_2, w_3) = (0.77, 0.06, 0.17)$, $\lambda_{\max} = 3.21$ ve tutarlılık indeksi T.I.= 0.1'dir.

w_i/ w_j ile hesaplanan öncelik matrisi göz önüne alındığında mutlak farkın en büyüğünün a_{12} ile w_1/ w_2 arasında olduğu görülür.

$$\begin{aligned} \text{1nci satır için} &= |a_{11} - w_1/ w_1| + |a_{12} - w_1/ w_2| + |a_{13} - w_1/ w_3| \\ &= |1-1| + |9-12,8| + |7-4,5| = 6,3 \\ \text{2nci satır için} &= |a_{21} - w_2/ w_1| + |a_{22} - w_2/ w_2| + |a_{23} - w_2/ w_3| \\ &= |0,1-0,08| + |1-1| + |0,2-0,35| = 0,02+0,15 = 0,17 \\ \text{3ncü satır için} &= |a_{31} - w_3/ w_1| + |a_{32} - w_3/ w_2| + |a_{33} - w_3/ w_3| \\ &= |0,243-0,221| + |5-2,83| + |1-1| = 0,022+2,17+0 = 2,192 \end{aligned}$$

Yapılan işlemlerle en büyük fark a_{12} ile w_i/w_2 arasında ve $w_i/w_2=14,15$ 'dir. Böylece a_{12} ile w_1/w_2 yer değiştirir ve önceliklerin tekrar hesaplanması ile özvektör (0.81, 0.04,0.15) ve $\lambda_{\max}= 3,09$, tutarlılık indeksi 0,02 bulunur. Burada tutarlılıkta yapılan düzeltmelere dikkat edilmelidir. Tekrar w_i/w_j 'den en büyük farkı veren birinci satırda yer değiştirme yapılırsa, (0.76, 0.04, 0.20) öncelik vektörü, $\lambda_{\max}= 3.023$ ve tutarlılık indeksi 0.01 bulunur. İşleme devam edildiğinde birinci satır karşılık gelen oranlar ile yer değiştirildiğinde (0.75, 0.04, 0.21) vektörü, $\lambda_{\max}= 3.003$ ve tutarlılık 0.00 elde edilir. Kişi, rangı 1 olan matris ile en küçük kareler yaklaşımını kullanarak, özvektörün elde edilmesini ayrıntılı olarak gösterebilir.

Kararları düzeltmede kullanılan ve oldukça uygun olan bir yöntem de, a_{ij} 'nin w_i/w_j 'ye oranlarının en büyüğünün seçilmesi ile ilgilidir.

Tutarlılığı düzeltmede, karar değerleri bu sürecin kullanımı ile ölçülen değerlerden aşırı farklı ise bu işlemden sakınılırız. Çünkü bu cevabı bozar. Kişi, tecrübelerinden ortaya çıkan kararları doğal olarak düzeltmeyi tercih eder (Saaty, 1988).

2.14.Grup Karar Verme Tekniklerinden Delphi Metodu ile Hiyerarşik Metodun Karşılaştırılması

Bazı kararlar tek bir kişinin yerine, bir grup tarafından da verilebilir. Bir grupta karar verilecek ise ya gruplar toplanarak ortak bir karar verilerler ya da tüm grup üyelerinin fikir üzerinde tek bir fikir belirtmeleri mümkün değildir. Bu grup üyelerinin ikili karşılaştırma matrisini doldururken, her bir eleman da ortak karara varması gerekir. Burada yukarıda söylediğimiz gibi elemanlar belirlenirken uzlaşmaya varılmışsa problem yoktur, ancak elemanların belirlenmesinde problem çıkıyorsa o zaman her bir karar vericinin bu matrisin her bir hücresi için verdiği kararların geometrik ortalaması alınır. Bu şekilde ikili karşılaştırmalar matrisi oluştururlar. Bu metod ortalama metod adıyla kullanılır. Eğer bir grupta n kişi varsa bunların kararları

$$a_{ij}^{avg} = [a_{ij}^1 \times a_{ij}^2 \times \dots \times a_{ij}^n]^{1/n}$$

formülünde yerleştirilip, matris elemanları hesaplanır (Saaty,1988).

Delphi tekniği bir grup karar verme tekniğidir. Bu teknikte üyelere bir grup sorunun yazı ile (anket) cevapladığı bir panel şeklinde gerçekleştirilir. 5-9 kişiden oluşan grup üyeleri soru hazırlar, geliştirir, analiz eder, sonuçları değerlendirir ve tekrar gerekli görülürse sorular yeniden hazırlanır. Oldukça uzun bir zamanda sonuca ulaşılan bir tekniktir.

Delphi Tekniği ile hiyerarşik modeller arasındaki farklar:

1) Delphide güçlü (önemli) kişilerin oransız etkilerini önlemek için grubun her bireyi önceden hazırlanmış bir ankete bireysel olarak yanıt verir. Hiyerarşilerde kriter ve kararlar çoğunlukla açık grup tartışmalarıyla yapılırlar.

2) Delphi’de anket sonuçlarının yeniden gözden geçirilmesi söz konusudur ve düzeltmeler tekrar bireysel bir bazda talep edilir.

Hiyerarşilerde dinamik tartışma, hiyerarşi oluşturulurken, insanların anlaşması ile kararların oluşturulmasında ve kararların gözden geçirilmesinde kullanılır.

3) Delphi’de anket dizaynı, anketi oluşturan kişi tarafından ilişkili kılınan değişkenleri dolaylı olarak belirtilmektedir. Hiyerarşilerde, kararlar üzerinde etkili olan değişkenlere grup karar vermektedir. İlk olarak tüm değişkenler kabul edilmiş, sonra bunları gruplandırma ile ayırmada yöntemle elde edilen düşük öncelikleri hesaba katmayabilir.

4) Delphi metodu istatistiksel bakımdan analiz edilecek olan sayısal yanıtları ister. Hiyerarşilerde kararlar ikili karşılaştırmalarda nitel kararlar 1’den 9’a mutlak sayılarla belirtilir. Tutarlılık, önemli bir kriterdir.

Her iki durumda da sorunu analiz etme prosesi, kararların kalitesini geliştirir ancak hiyerarşi yöntemi kararı basit kısımlara parçalar ve bu nedenle insanın kavrama tarzına daha iyi uyar. Burada bir diğer önemli konu da grubun bir dizi önemli değişkeni tespit etmesi ve bu nedenle onların karar ilişkilerinde daha iyi güvene sahip olmasıdır (Golden, 1989), (Saaty, 1988).

2.15.Bir Örnek Yardımı İle AHY Probleminin İncelenmesi

Analitik Hiyerarşi Yaklaşımını daha iyi kavrayabilmek için aşağıdaki problemi inceleyelim (Golden, 1989).

Philadelphia'da üniversiteden mezun olan bir kişiye dört farklı şehirden iş teklifi gelmiştir. Bu şehirler; Boston, Los Angles, St.Louis ve Houston. Bu dört şehir merkezindeki her bir iş temelde aynıdır, böylece üniversite mezunu olan kişinin her şehirdeki genel yaşam kalitesi bazında, hangi işi tercih edeceğine karar vermesi gerekmektedir.

Doğma büyüme Philadelphia'lı olan kişinin, bu kararda önemli bir kriteri kişinin bulunduğu yerden şehirlere olan uzaklıktır. Bunun için bu kişinin atlası bakarak daha önce tahmin ettiği şehirler arası mesafeleri ile gerçek mesafe bilgileri Çizelge 2.6'da verilmiştir. Bu durum kıyaslanabilir.

Çizelge 2.6 Relatif uzaklık tahminleri

	Gerçek uzaklık (mil)	Normalize uzaklık	Tahmin edilmiş uzaklık
Boston	296	0,055	0,059
Los Angles	2706	0,503	0,513
St. Louis	868	0,163	0,160
Houston	1508	0,280	0,269
Toplam	5378		T.O.= 0,006

Buradaki normalize uzaklıklar Çizelge 2.6'da yer alan gerçek uzaklık değerlerinin her birinin toplam uzaklığa bölünmesi ile elde edilmiştir.

$$(296/5378 = 0,055 \quad 2706/5378= 0,503 \quad 868/5378= 0,163 \quad 1508/5378= 0,280)$$

Karar verici Philadelphia'nın diğer dört şehir ile olan uzaklıklarını ikili olarak karşılaştırması sonucunda 1-9 ölçek oranlarını kullanarak tahminlerde bulunmuş ve buna ait normalize uzaklıklar (öncelikler) hesaplanmıştır.

Bu bilgiler göz önüne alındığında, eğer büyük sayı değerine sahip alternatiflerin daha çok tercih edileceği gibi bir anlam çıkıyorsa, işlem kolaylığı için uzaklıkların inversi (ters) alınmış ve tekrar normalize edilmiştir. Bu yeni duruma ait bilgiler ise Çizelge 2.7'de verilmiştir. Bu Çizelgeya bakıldığında Boston şehri (0,6073) ağırlığı ile en çok tercih

edilen şehirdir ve sonra sırasıyla ve St. Louis (0,2071), Houston (0,1192), Los Angles (0,0664) şehirleri tercih edilen şehirlerdir.

Çizelge 2.7 Philedelphia'ya olan uzaklıkların inversi

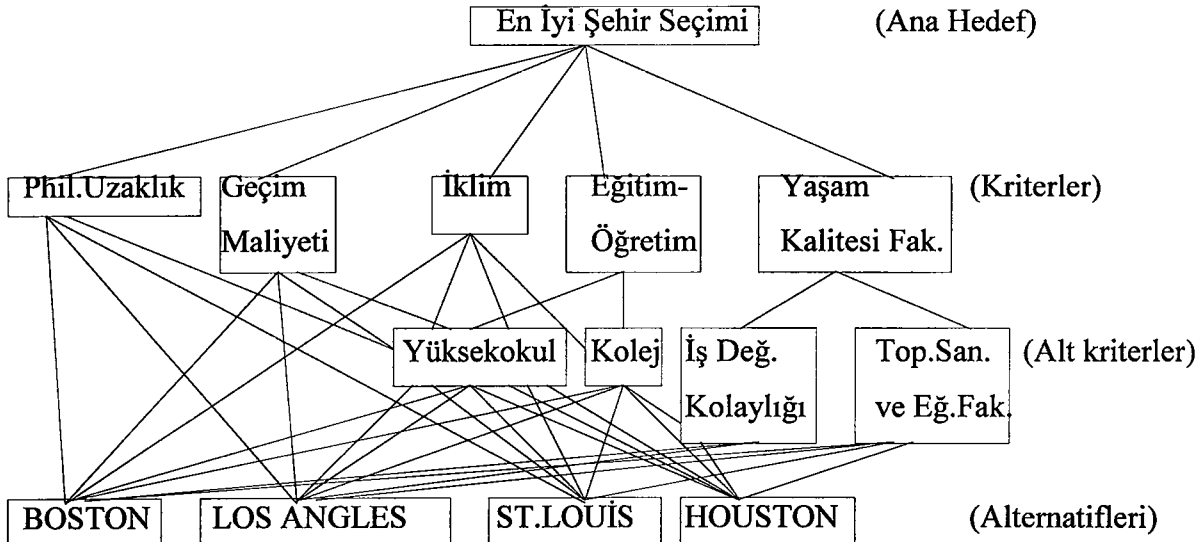
	Gerçek uzaklıkların inversi	İnvers uzaklıkların normalizesi
Boston	0,0033784	0,6073
Los Angles	0,0003695	0,0664
St. Louis	0,0011521	0,2071
Houston	0,0006631i	0,1192
Toplam:	0,0055631	

Eğer uzaklık kriteri karar verici için iş seçimi kararlarında baz olan tek kriter ise, o zaman bu kişinin Boston şehrini seçeceği açıktır. Ancak kararı etkileyen başka faktörler de varsa, sonuç değişecektir. Bu kişi, kararı etkileyen diğer kriterlerin şunlar olduğuna karar vermiştir:

- Geçim maliyeti
- İklim
- Eğitim ve öğretim
 - İlkokul ve yüksekokul
 - Kolej ve üniversiteler
- Yaşam kalitesi faktörleri
 - İş değiştirme kolaylığı
 - Toplumsal sanat ve eğlendirici, dinlendirici faktörler

Üniversite mezunu bir kişi hangi şehre gideceği konusunda karar vermede bu çeşitli kriterler arasında nasıl dengelemeler yapar?

Karar vericinin bu problemi çözebilmesi için yapacağı ilk iş, karar probleminin yapısının nasıl olduğunu belirlemektir. Yani yukarıda belirlenmiş olan kararı etkileyen kriterleri (faktörleri), alt kriterleri ve alternatifleri bir hiyerarşik model ile göstermektir. Bu model Şekil 2.8'de gösterilmiştir.



Şekil 2.8 En iyi şehir seçimi problemi için hiyerarşi

Şekil 2.8’de görüldüğü gibi birinci seviyeyi yani ana hedefi en iyi şehir seçimi oluşturmaktadır. İkinci seviyede ise Philadelphia’dan Uzaklık, Geçim Maliyeti, İklim, Eğitim-Öğretim, Yaşam Kalitesi gibi beş kriter görülmektedir. Üçüncü seviyede ise Yüksekokul-Kolej, İş Değiştirme Kolaylığı- Toplumsal Sanat ve Eğlendirici Faaliyetleri içeren dört tane alt kriter bulunmaktadır.

Bundan sonra AHY’ye göre yapılacak iş, karar vericinin, kriterlerin birbirlerine göre relatif (görelî) önemlerini belirlemesidir. Daha sonra alt kriterlerin bağlı olduğu kriterlere göre relatif (göreceli) önemlerini belirlemesi istenir. En son olarak da karar vericinin karar alternatifleri arasında her bir kritere göre ikili karşılaştırmaları yaparak öncelikleri belirlemesidir. Böylece matematiksel işlemlerle dört şehir ana hedefe göre sıralanabilecektir.

AHP ile önceliklerin belirlenmesi

Şehir seçimi probleminde belirlenmesi gereken öncelikler şunlardır:

- Tespit edilmiş olan beş kriterin birbirlerine göre öncelikleri
- Uzaklık kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri
- Geçim maliyeti kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri
- İklim kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri

- Eğitim-öğretim kriterine göre yüksekokul-kolej alt kriterlerinin birbirlerine göre öncelikleri
- Yaşam kalitesi kriterine göre iş değiştirme kolaylığı ve toplumsal sanat-eğlendirici faktörlerin oluşturduğu alt kriterlerin birbirlerine göre öncelikleri
- Yüksekokul alt kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri
- Kolej alt kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri
- İş değiştirme kolaylığı alt kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri
- Toplumsal sanat ve dinlendirici faaliyetler alt kriterine göre dört şehrin birbirlerine göre öncelikleri

Buradaki uzaklık kriterine göre dört şehrin birbirine öncelikleri Çizelge 2.7’de gösterilen gerçek değerler kullanılarak hesaplanır.

Buradaki iklim ve geçim maliyeti kriterlerinde neler göz önüne alınmalıdır?

İklim kriteri kişinin seçeceği şehirdeki yaşama ortamı, rutubet, nem v.b. gibi sağlığı etkileyen faktörler kapsar. Geçim maliyeti kriteri genellikle orta halli tüketiciler için söz konusudur. Üniversite mezunu bir kişi, bu kriter hakkında detaylı bilgiyi, ilgili kaynak ve ölçümlerden belirlenen istatistiki Çizelgelere bakarak alabilir. Bu söylediğimiz kriterler en iyi şehir seçiminde çok etkili veya hiç etkili olmayabilir. Geçim maliyetine göre şehirlerin sıralaması araştırılmış ve Çizelge 2.9 elde edilmiştir. Bu nedenle geçim maliyeti kriterine göre ikili karşılaştırmalar matrisi düzenlenmeden direkt olarak öncelikleri kullanılacaktır. Fakat karar verici iklime göre sıralama oluşturmada, ikili karşılaştırmalar yapmayı tercih etmiştir. Burada iklime göre şehirlerin karar değerlerini belirlemede 1-9 ölçek değerlerini kullanacaktır. Bunun nedeni, örneğin uzaklık karşılaştırmalarında “St. Louis, Philedelpia’dan Boston’dan olduğundan 3 kez daha uzaktır.” demek kolaydır. Ancak iklim karşılaştırmalarında bu “3 kez” ifadesinin bir anlamı yoktur. Dolayısıyla daha önce ikili karşılaştırmalar matrisinde söz ettiğimiz değerler kullanılacaktır. Bu şehirlerin ikili karşılaştırılmasında şu tür sorular sorulabilir. “İklim yönünden Boston şehrinin Houston şehrine göre önemi (üstünlüğü) nedir?”. Kişi bu soruya “Boston, Houston şehrine göre oldukça daha iyidir.” cevabını vermiş ve bu Boston-Houston ikili karşılaştırması Çizelgeya bakıldığında “5” değerini almıştır. Eğer Boston, Houston şehrine göre daha iyi ise 3, fazlasıyla daha iyi ise 7, kesinlikle daha iyi ise 9 değerlerini alacaktır.

St. Louis ile Houston şehrini iklim kriterine göre karşılaştırdığımızda St. Louis'in Houston'a orta kuvvetle-eşit arasında tercih edildiğinden 2 değeri verilmiştir. Karşılaştırmalar bu şekilde sorulacak sorularla devam edilmiştir. Bunlardan 4 tanesi Boston-Boston, St. Louis-St. Louis, Houston-Houston, Los Angles-Los Angles gibi aynı şehirlerin karşılaştırması "1" olacaktır. Geriye kalan 8 değer, 4 tanesinin bilinmesi yeterlidir. Çünkü Los Angles-Houston karşılaştırma değeri 5 ise Houston-Los Angles değerinin sorulması gereksizdir. Bu değer 5'in çarpmaya göre tersi 1/5'tir.

Böylece iklim kriteri için alternatiflerin karşılaştırma değerlerini gösteren karşılaştırma matrisi Çizelge 2.8'de verilmiştir.

Çizelge 2.8 İklim'e göre şehir karşılaştırmaları ikili karşılaştırmalar

	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston	Relatif Öncelikler (Öncelik Vektörü)
Boston	1	1/3	2	5	0,263
Los Angles	3	1	4	5	0,529
St. Louis	1/2	1/4	1	2	0,133
Houston	1/5	1/5	1/2	1	0,075
				T.O.	0,04

Bu ikili karşılaştırma matrisini oluşturduktan sonra, karşılaştırılan her bir elemanın "öncelik durumu"nın tespit edilmesi gerekir. Bu yukarıdaki matriste gösterilen ikili karşılaştırma değerleri kullanılarak öncelikler hesaplanabilir. AHY'nin bu aşaması "sentezleştirme" (synthesizaiton) olarak tanımlanır.

Sentezleştirme işlemi için gerekli olan tüm matematiksel işlem "özvektör" hesaplamasını içermektedir.

Burada yapılan işlemler aşama aşama anlatılırsa;

I.AŞAMA: İkili karşılaştırma matrisinin her sütunun toplamı hesaplanır.

İklim	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston
Boston	1	1/3	2	5
Los Angles	3	1	4	5
St. Louis	½	¼	1	2
Houston	1/5	1/5	½	1
Sütun Toplamı	$\frac{47}{10} = 4,7$	$\frac{107}{60} = 1,783$	$\frac{15}{2} = 7,5$	13

II.AŞAMA: Her bir matris elemanı bu toplam değere bölünür. Her sütun için bu işlem gerçekleştirilir. Sonuçta elde edilen matris “normalize edilmiş” ikili karşılaştırma matrisidir.

İklim	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston
Boston	10/47	20/107	4/15	5/13
Los Angles	30/47	60/107	8/15	5/13
St. Louis	5/47	15/107	2/15	2/13
Houston	2/47	12/107	1/15	1/13

III.AŞAMA: Matrisin her bir satırının aritmetik ortalaması hesaplanır.

İklim	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston	Satır Ortalamaları
Boston	0,213	0,187	0,267	0,385	$1,052/4 = 0,263$
Los Angles	0,638	0,561	0,533	0,385	$2,117/4 = 0,529$
St. Louis	0,106	0,140	0,133	0,154	$0,533/4 = 0,133$
Houston	0,043	0,112	0,067	0,077	$0,299/4 = 0,075$
Toplam: 1					

Bu sentez iklim kriterine bağlı olarak dört şehrin ilişkili önceliklerini göstermektedir. Buna bağlı olarak Los Angles şehri 0,529 öncelikle birinci, Boston şehri 0,263 öncelikle ikinci, St. Louis 0,133 öncelikle üçüncü ve Houston şehri 0,075 öncelikle dördüncüdür. İklim kriterine göre öncelik vektörü aşağıdaki gibi gösterilir:

$$\begin{bmatrix} 0,263 \\ 0,529 \\ 0,133 \\ 0,075 \end{bmatrix}$$

AHY yönteminin ana aşamalarından biri ikili karşılaştırma değerlerini kullanarak önceliklerin belirlenmesi idi. Verilecek olan son kararın güvenilirliği ile ilgili bir faktör, karar vericinin kararlarında tutarlı olmasıdır. Bunun için de tutarlılık oranı (T.O.) hesaplanır. Bu oran 0,1 seviyesinin altında ise problemin çözümüne devam edebilmek için kabul edilebilir niteliktedir.

AHY'nin tutarlılık oranının hesaplanmasının aşamaları aşağıda gösterildiği gibidir:

1.AŞAMA: İkili karşılaştırma matrisinde ilk sütundaki her bir değer, ilgili alternatifin hesaplanmış olan ilişkili öncelik vektörü ile çarpılır. Aynı işlem diğer sütunlara uygulanır. Yani kısaca ikili karşılaştırma matrisi sağdan öncelik vektörü ile çarpılır.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ 1/2 \\ 1/5 \end{bmatrix} & + & 0,529 & \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1 \\ 1/4 \\ 1/5 \end{bmatrix} & + & 0,133 & \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \\ 1/2 \end{bmatrix} & + & 0,075 & \begin{bmatrix} 5 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \\
 \\
 \begin{bmatrix} 0,263 \\ 0,789 \\ 0,132 \\ 0,053 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0,176 \\ 0,529 \\ 0,132 \\ 0,106 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0,266 \\ 0,532 \\ 0,133 \\ 0,067 \end{bmatrix} & + & \begin{bmatrix} 0,375 \\ 0,375 \\ 0,15 \\ 0,075 \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1,08 \\ 2,225 \\ 0,547 \\ 0,301 \end{bmatrix} \\
 & & & & & & & \swarrow & \text{Ağırlıklı Toplam Vektörü}
 \end{array}$$

2.AŞAMA: 1nci aşamada elde edilen ağırlıklı toplam vektör elemanları, ilişkili öncelik değerlerine bölünür.

$$\frac{1,08}{0,263} = 4,106$$

$$\frac{2,225}{0,529} = 4,206$$

$$\frac{0,547}{0,133} = 4,113$$

$$\frac{0,301}{0,075} = 4,013 \text{ değerleri bulunur.}$$

3.AŞAMA: İkinci aşamada bulunan değerlerin aritmetik ortalaması alınır. Bu değer $\lambda_{\max}$ 'dir.

$$\lambda_{\max} = \frac{4.106+4.206+4.113+4.013}{4} = 4.108$$

4.AŞAMA: "Tutarlılık İndeksi" T.I. aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$T.I. = \frac{\lambda_{\max} - n}{n-1} = \frac{4.108-4}{3} = 0,036$$

5.AŞAMA: Tutarlılık oranı (consistency ratio) T.O. hesaplanır.

$$T.O. = \frac{T.I.}{R.I.}$$

Buradaki R.I. (Random Index), daha önce verilen Çizelge değerinden $n=4$ 'e karşılık gelen 0,90 değeridir.

$$T.O. = \frac{0,036}{0,90} = 0,04 \text{ bulunur.}$$

Tutarlılık oranı $0,04 < 0,10$ olduğundan kararların tutarlı olduğu kabul edilir ve çözüme devam edilir.

Bu yapılan işlemlerden görüleceği gibi, üniversite mezunu kişi en iyi şehir olarak Los Angeles'i seçmiştir ve bu kişi rutubetli yerlerde yaşayamadığından bu sıralama Boston, St. Louis ve Houston şeklindedir.

Kişi geriye kalan kriterlerin tamamı için bu işlemleri, ikili karşılaştırma yöntemi ile benzer şekilde hesaplar. Ancak karar verici, geçim maliyetine göre şehirlerin ikili karşılaştırmalarını yapmadan, daha önceden araştırılıp belirlenmiş olan Çizelge 2.9'daki değerleri kullanacaktır.

Çizelge 2.9 Geçim maliyetine göre şehir rankları (sıralanması)

	Geçim Maliyeti İndeksi (Sütun)	Yukarı Sütun Yüzdesi	Minimum Yüzdenin İnversi	Normalize Edilmiş İnvers Yüzdesi
Boston	335.1	1.392	0.7184	0.31836
Los Angles	345.1	4.418	0.2263	0.10031
St. Louis	330.5	1.000	1.000	0.44315
Houston	341.1	3.207	0.3118	0.13818
			2.0302	

Karar vericinin alt kriterlere göre de ikili karşılaştırmalar yapması gerekmektedir. Bu ikili karşılaştırmalar yöntemi, toplamaları bir olan iki sayının bulunmasına karşılıktır. Bu matrislerin yapısı, daha önce ele alınmış olan iklim kriterine göre oluşturulmuş matrisin yapısı ile aynıdır. Burada karar verici St. Louis ile Boston şehirlerini ilkökul ve yüksekokul bakımından kıyasladığında her iki şehrin de eşit öneme sahip olduğu kanısına varmış ve 1 değerini vermiştir. Bu karşılaştırma değerleri ve hesaplamaları Çizelge 2.10'da verilmiştir. Kolej ve üniversiteler, iş değiştirme kolaylığı, toplumsal sanat ve eğlence alt kriterlerinin ikili karşılaştırma matrisleri ve daha önce hesaplandığı gibi bu dört kriter için de öncelik vektörleri hesaplanmış, aşağıdaki Çizelgelarda gösterilmiştir.

Çizelge 2.10 İlkokul ve yüksekokullara göre şehir karşılaştırmaları

	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston	Relatif Öncelikler
Boston	1	5	1	4	0.421
Los Angles	1/5	1	2	2	0.246
St. Louis	1	1/2	1	2	0.229
Houston	1/4	1/2	1/2	1	0.104
					T.O.= 0.071

Çizelge 2.11 Kolej ve üniversitelere göre şehir karşılaştırmaları

	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston	Relatif Öncelikler
Boston	1	2	5	6	0.538
Los Angles	1/2	1	2	3	0.253
St. Louis	1/5	1/2	1	2	0.130
Houston	1/6	1/3	1/2	1	0.079
					T.O.= 0.006

Çizelge 2.12 İş değiştirme kolaylığına göre şehir karşılaştırmaları

	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston	Relatif Öncelikler
Boston	1	1	1/7	1/6	0.063
Los Angles	1	1	1/8	1/7	0.059
St. Louis	7	8	1	2	0.530
Houston	6	6	1/2	1	0.348
					T.O.= 0.010

Çizelge 2.13 Toplumsal sanat ve eğlence, dinlenme faaliyetlerine göre şehir karşılaştırmaları

	Boston	Los Angles	St. Louis	Houston	Relatif Öncelikler
Boston	1	1/2	4	5	0.324
Los Angles	2	1	5	6	0.508
St. Louis	1/4	1/5	1	2	0.103
Houston	1/5	1/6	1/2	1	0.066
					T.O.= 0.015

Bu verilen dört alt kriterin bağlı oldukları kriterlere göre ikili karşılaştırmaları sonucunda oluşan matrisler aşağıda Çizelge 2.14'te verilmiş ve öncelik vektörleri hesap edilmiştir.

Çizelge 2.14 Alt kriterlerin karşılaştırılması

Alt kriterler	Öncelik Vektörü
İlkokul-Yüksekokul	0.4
Kolej-Üniversite	0.6
İş Değiştirme Kolaylığı	0.3
Toplumsal Sanat ve Eğlendirici Faaliyetler	0.7

Karar verici, beş kriterin hedefe göre ikili karşılaştırmalarını yapacaktır. Burada $5.4/2 = 10$ karşılaştırma yapması gerekir. Bunlar uzaklık-geçim maliyeti, uzaklık-eğitim öğretim, geçim maliyeti-eğitim öğretim, iklim-uzaklık, iklim-geçim maliyeti, iklim-eğitim öğretim, iklim-yaşam kalitesi, yaşam kalitesi-uzaklık, yaşam kalitesi-geçim maliyeti, yaşam kalitesi-eğitim öğretim karşılaştırmalarıdır. Tüm sonuçlar Tabla 2.15'te gösterilmiştir.

Çizelge 2.15 Hedefe göre kriterlerin karşılaştırılması

	Uzaklık	Geçim maliyeti	İklim	Eğitim Öğretim	Yaşam Kalitesi	(Relatif Öncelikler) Öncelik Vektörü
Uzaklık	1	2	1/2	2	1/3	0.157
Y.Pahalılığı	1/2	1	1/4	2	1/3	0.107
İklim	2	4	1	2	1	0.302
Eğt.Öğretim	1/2	1/2	1/2	1	1/4	0.088
Yaşam kalitesi	3	3	1	4	1	0.346
T.O.= 0.036						

Yukarıdaki matrise göre, yaşam kalitesinin şehir seçiminde en önemli faktör olduğu görülmektedir.

Eğitim-öğretim kriterlerine göre alternatiflerin önceliklerini belirlemek için, ilkokul-yüksekokul ve kolej-üniversite alt kriterlerine göre alternatiflerin öncelik vektöründen oluşan matris ile alt kriterlerin öncelik vektörü çarpılır. Böylece eğitim-öğretim kriterine göre alternatiflerin karma (compasite) öncelikleri hesaplanır.

$$\begin{bmatrix} 0,421 \\ 0,246 \\ 0,229 \\ 0,104 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,538 \\ 0,253 \\ 0,130 \\ 0,079 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,421 \cdot 0,4 + 0,538 \cdot 0,6 \\ 0,246 \cdot 0,4 + 0,253 \cdot 0,6 \\ 0,229 \cdot 0,4 + 0,19 \cdot 0,6 \\ 0,104 \cdot 0,4 + 0,079 \cdot 0,6 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 0,1684 + 0,3228 \\ 0,098 + 0,1518 \\ 0,092 + 0,078 \\ 0,042 + 0,047 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,491 \\ 0,250 \\ 0,170 \\ 0,089 \end{bmatrix}$$

Çizelge 2.16 Eğitim kriteri altında karma (compasite) öncelikler

	Yüksekokul (0,4)	Kolejler (0,6)	Karma Öncelik Vektörü
Boston	0,421	0,928	0,491
Los Angles	0,246	0,253	0,250
St. Louis	0,229	0,130	0,170
Houston	0,104	0,079	0,089
T.O.	0,071	0,006	0,032

Çizelge 2.17 Yaşam kalitesi altında karma öncelikler

	İş Değiştirme Kolaylığı (0.3)	Toplumsal Sanat ve Eğlendirici Faaliyetler (0.7)	Karma Öncelikler
Boston	0,063	0,324	0,246
Los Angles	0,059	0,508	0,373
St. Louis	0,530	0,103	0,231
Houston	0,348	0,066	0,151
T.O.	0,010	0,015	0,014

Son matris ile yaşam kalitesine göre alternatiflerin karma öncelikleri hesaplanmıştır.

En son aşama olarak karar alternatiflerinin genel sıralamasını hesaplayan en iyi prosedürü en iyi şekilde kavrayabilmek için, her bir kriterin önceliğini, bir ağırlık değeri olarak kabul

etmek gerekir. Buna göre alternatiflerin genel önceliği, ilgili kriterin öncelik değeri ile bu kritere bağlı karar alternatiflerinin öncelik değerlerinin çarpım sonuçlarının toplanması ile elde edilir.

Hatırlarsak, kriterlerin öncelik değerleri uzaklık (0,157), geçim maliyeti (0,107), iklim (0,302), eğitim-öğretim (0,088), yaşam kalitesi (0,346) olarak bulunmuştu (Çizelge 2.15).

Boston şehrinin genel önceliği hesaplanırken,

$$\begin{aligned}
 &= 0,157.(0,607)+0,107.(0,318)+0,302.(0,263)+0,088.(0,491)+0,346.(0,246) \\
 &= 0,095 \quad + 0,034 \quad + 0,079 \quad + 0,043 \quad + 0,085 \\
 &= 0,336
 \end{aligned}$$

Los Angeles şehrinin genel önceliği,

$$\begin{aligned}
 &= 0,157.(0,066)+0,107.(0,10)+0,302.(0,529)+0,088.(0,25)+0,346.(0,373) \\
 &= 0,335
 \end{aligned}$$

St. Louis şehrinin genel önceliği,

$$\begin{aligned}
 &= 0,157.(0,207)+0,107.(0,443)+0,302.(0,133)+0,088.(0,170)+0,346.(0,231) \\
 &= 0,215
 \end{aligned}$$

Houston şehrinin genel önceliği,

$$\begin{aligned}
 &= 0,157.(0,119)+0,107.(0,138)+0,302.(0,075)+0,088.(0,089)+0,346.(0,151) \\
 &= 0,115
 \end{aligned}$$

Ya da bu işlemi matrislerin çarpımı şeklinde ifade edersek,

$$\begin{bmatrix} 0,607 & 0,318 & 0,263 & 0,491 & 0,246 \\ 0,066 & 0,100 & 0,529 & 0,250 & 0,373 \\ 0,207 & 0,443 & 0,133 & 0,170 & 0,231 \\ 0,119 & 0,138 & 0,075 & 0,089 & 0,151 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} 0,157 \\ 0,107 \\ 0,302 \\ 0,088 \\ 0,346 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,346 \\ 0,335 \\ 0,215 \\ 0,115 \end{bmatrix}$$

Uzaklık öncelik vektörü	Geçim mas.önc. vektörü	İklim öncelik vektörü	Eğitim-Öğr. karma önc. vektörü	Yaşam kalitesi Karma öncelik vektörü	Kriterlerin öncelik değeri	Genel öncelik vektörü
-------------------------------	------------------------------	-----------------------------	--------------------------------------	--	----------------------------------	-----------------------------

Bu şehirlerin genel öncelikleri ve tutarlılık oranını gösteren değerler Çizelge 2.18’de gösterilmiştir.

Çizelge 2.18 Şehirlerin genel (karma) öncelikleri

	Uzaklık (0,157)	Geçim mal. (0,107)	İklim (0,302)	Eğt.Öğr. (0,088)	Y.Kalitesi (0,346)	Genel Öncelik
Boston	0,607	0,318	0,263	0,491	0,246	0,346
Los Angles	0,066	0,100	0,529	0,250	0,373	0,335
St. Louis	0,207	0,443	0,133	0,170	0,231	0,215
Houston	0,119	0,138	0,075	0,089	0,151	0,115
T.O.	0,000	0,000	0,026	0,032	0,014	0,015

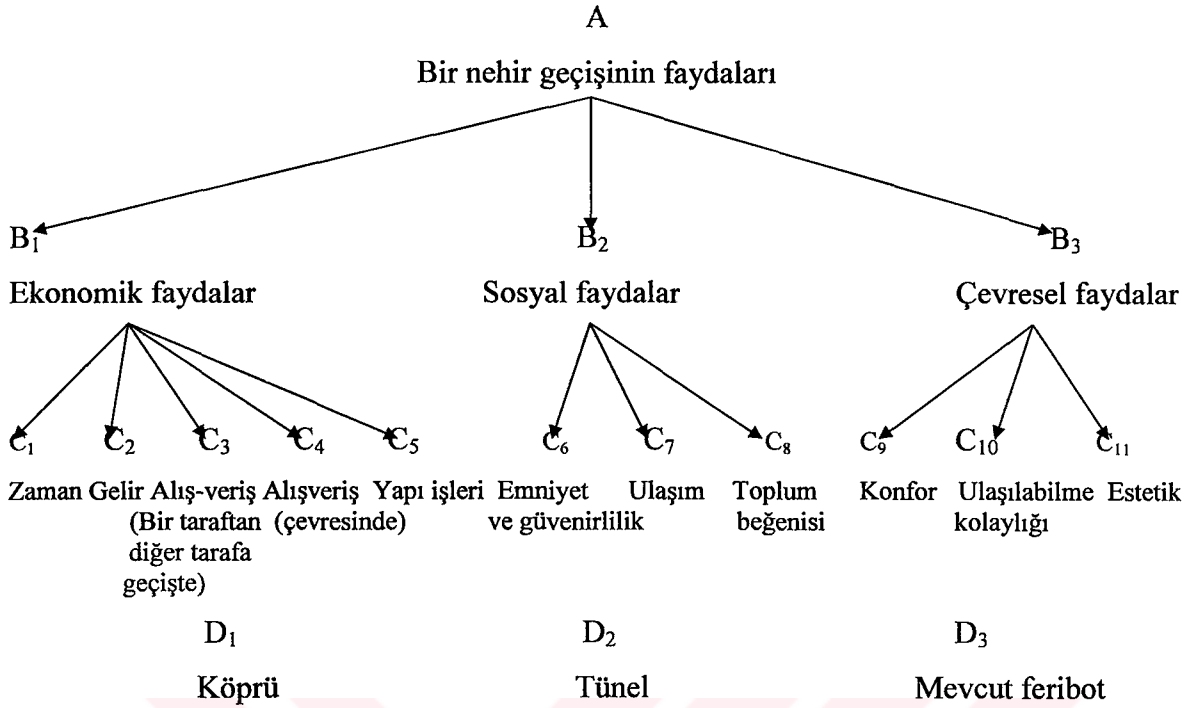
Bu sonuçlar üniversite mezununun tercihlerine paralel olarak ortaya çıkmıştır. Burada üniversite mezununun seçmesi gereken şehir BOSTON’dur. Üniversite mezununun AHY’nin tanımladığı gibi BOSTON şehrini seçip seçmeyeceği yine kendi kararıdır. Karar verici AHY’nin kararına uysun veya uymasın, karar verirken AHY yöntemi kendisine oldukça önemli seviyede bir fayda sağlamıştır.

Bu yöntem daha önce de bahsedildiği gibi, gerçek yaşamda pekçok alana uygulanmıştır. AHY ile ilgili başka örnekler Bölüm 3’de verilecektir.

Bir nehir geçişinde tünel veya köprü yapımı ile ilgili fayda ve maliyet analizi

Belirli bir bölgede köprü, tünel v.s.’nin inşası üzerine karar verme yetkisi olan bir devlet kuruluşu, halen özel bir şahsa ait bir feribot tarafından hizmet verilen bir nehir üzerinden bir tünel ve/veya bir köprü inşa edip etmeme hakkında karar vermelidir.

Bir nehir geçişinde fayda ve maliyet yönünden her ikisini de etkileyen faktörler sırasıyla Şekil 2.9 ve Şekil 2.10’da verildiği gibi iki hiyerarşik modelle gösterilmiştir. Bu faktörler üç kategoride toplanmıştır; ekonomik, sosyal ve çevresel faktörler. Karar ise faydaların maliyetlere oranları ile oluşturulur. (Fayda/Maliyet)



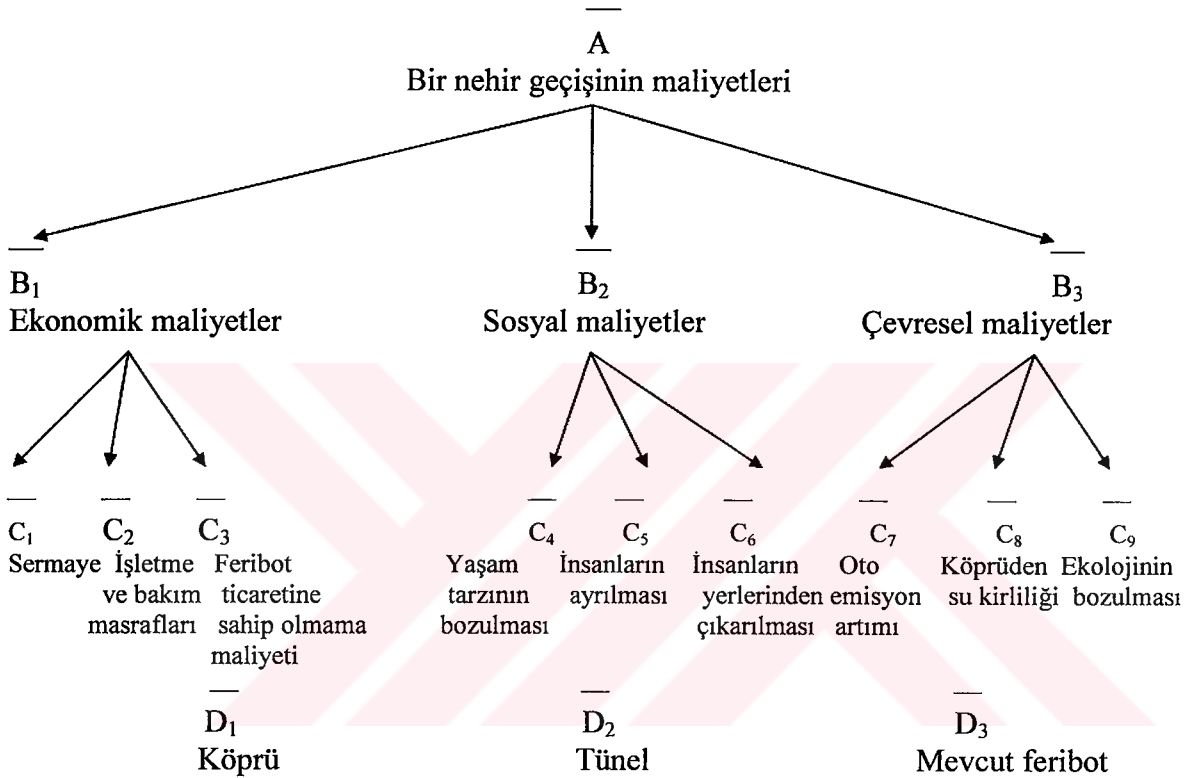
Faydalar:

Seçimi etkileyen ekonomik faktörler, mevcut feribotu kullanımdan çok yeni bir köprü veya tüneli kullanmada tasarruf edilen zamandan çıkarılan yarardan (faydadan) oluşur. Bölge dışında artan trafik, yerel yönetime, geçiş ücreti geliri ile genel gelire katkıda bulunabilir. Ayrıca buradaki alış-verişlerdeki artış, trafiğin artmasına sebep olur, bunun da genelde topluma faydalı olduğu görülür. İlave olarak trafik, benzin istasyonları, restoran gibi alış-veriş yerleri yakınlarında yoğun olacaktır. Bu yapılan inşaat işlerinden de ekonomik yararlar sağlanır. Eğer sadece kişiler göz önüne alınırsa, bu faktörlerin çoğu sayısal olarak (quantitatively) hesap edilebilir. Birleştirilmiş maliyet dahi sayısal olarak hesap edilebilir ve bir fayda/maliyet oranı karar vermede kullanılabilir. Fakat herhangi bir yolla sayısal olarak ifade edilemeyen sosyal ve çevresel faktörler de göz önüne alınmalıdır.

Projenin sosyal yararları, toplumun bir bütün olarak bir köprü veya tünelin yapılışından sağlayacağı yararları göstermektedir. Bunlar feribottan daha büyük emniyet ve güvenirlilik sağlanacaktır. Tünel veya köprü kullanımı, feribota nazaran akraba, arkadaşları, müzeleri v.s. ziyaret etmek üzere karşıdan karşıya daha çok geziye katkıda bulunacaktır. Sonuç

olarak, feribot kullanımında aynı derecede ortaya çıkmayan toplum beğenisi oluşturulabilir.

Çevresel faktörler, bireye şahsi olarak fayda sağlayan katkılar olarak ele alınabilir. Kişisel yararlar, toplum yararlarından farklıdır. Bir bireyi ilgilendiren çevresel faktörler, köprü, tünel veya feribotun kullanım rahatlığı (konforu), ulaşım kolaylığı ve görünüşü (estetik).



Şekil 2.10. Bir nehir geçişinin maliyetini gösteren hiyerarşi

Maliyetler:

Faydalarda olduğu gibi, bir nehri geçmenin maliyetleri ekonomik, sosyal ve çevresel faktörleri içerebilir. Düşünülen üç ekonomik maliyet, alternatiflerin serması, üç projeye ait işletme ve bakım masrafları ve bir feribot ticaretine sahip olmamadan doğan ekonomik maliyetlerdir.

Sosyal maliyetler, yine toplum (topluluk) maliyetlerini göstermektedir. Nehri geçmek için alternatifleri (köprü, tünel ve feribot) kullanmada yaşam tarzının bozulma derecesinin önemli olduğu düşünülür. Burada geçişlerin çeşitli şekillere göre trafik yoğunluğu farklı

olmaktadır ve bu önemli bir maliyet tutmaktadır. Sonuncu sosyal maliyet ise seçilen alternatiflere göre insanların bulundukları yerlerden çıkarılmasının toplumdaki etkisidir.

Çevresel maliyetler, çevresel faydalardan farklıdır ki, seçilen çeşitli alternatiflerin ekosisteme olası zarar verdiği görülür. Nehri geçmenin çeşitli yolları, bölgede oto emisyonu artırır. Buna ilave olarak, suyun kirlenmesi ve genel ekolojinin bozulması çevresel maliyetlere ek olarak düşünülebilir.

Faydaya ait karar matrisleri ve maliyetlere ait karar matrisleri aşağıda verilmektedir.

Bunlardan çıkan sonuçlara bakıldığında hem fayda hem de maliyet hesaplamalarında, ekonomik faktörler diğer faktörlerden daha önemlidir. Köprü yoluyla nehri geçmeden sağlanan gelir, sağlanan emniyet ve güvenirlilik ve nehri geçmedeki ulaşım kolaylığı hepsi büyük öncelikler almıştır.

Maliyetlerde, gerekli sermaye, insanların bulundukları evlerden çıkarılmaları ve oto emisyonların miktarına (tutarına) gelince hepsi de büyük öncelikler almıştır.

Faydalar ve maliyetler şu şekilde bulunmuştur.

	<u>Köprü</u>	<u>Tünel</u>	<u>Feribot</u>
* Faydalar (b_i)	0,57	0,36	0,07
* Maliyetler (c_i)	0,36	0,58	0,005

Fayda/maliyet analizinde kullanılan kriter, $\max b_i/c_i$ 'dir. Yani faydanın maliyete oranının en büyüğüne sahip proje tercih edilir.

Bu örnek için;

<u>Köprü</u>	<u>Tünel</u>	<u>Feribot</u>
b_1	b_2	b_3
$\frac{b_1}{c_1} = 1.58$	$\frac{b_2}{c_2} = 0.68$	$\frac{b_3}{c_3} = 1.28$
c_1	c_2	c_3

Nehir geçişinde sermaye ihtiyaçları göz önüne alınarak, köprü yapımı tercih edilir.

Maliyetler yönünden marjinal analiz $0.05 \leq 0.36 \leq 0.58$ fayda yönünden $0.57 \geq 0.36 \geq 0.07$ 'dir.

Faydalar için karar matrisleri

A	B ₁	B ₂	B ₃	Özvektör (Öncelik)
B ₁	1	3	6	0,67→ ekonomik
B ₂	1/3	1	2	0,22→ sosyal
B ₃	1/6	1/2	1	0,11→ çevresel

T.I.= 0

Fayda yönünde baktığımızda bir nehir geçişinde ekonomik faktörün ekonomik faktöre göre önemi 1'dir. Bir nehir geçişinde sağlanan faydaya göre ekonomik faktörlerin sosyal faktörlere göre önemi nedir? Bu ekonomik faktörler, sosyal faktörlere göre biraz daha önemlidir ve "3" ile gösterilmiştir.

B ₁	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	C ₅	Özvektör (Öncelik)
C ₁	1	1/3	1/7	1/5	1/6	0,04
C ₂	3	1	1/4	1/2	1/2	0,09
C ₃	7	4	1	7	5	0,54
C ₄	5	2	1/7	1	1/5	0,11
C ₅	6	2	1/5	5	1	0,23

T.I.= 0.14

B ₂	C ₆	C ₇	C ₈	Özvektör (Öncelik)
C ₆	1	6	9	0,76
C ₇	1/6	1	4	0,18
C ₈	1/9	1/4	1	0,06

T.I.= 0,05

B ₃	C ₉	C ₁₀	C ₁₁	Özvektör (Öncelik)
C ₉	1	1/4	6	0,25
C ₁₀	4	1	8	0,69
C ₁₁	1/6	1/8	1	0,06

T.I.= 0.07

C ₁	D ₁	D ₂	D ₃	Özvektör (Öncelik)
D ₁	1	2	7	0,58
D ₂	1/2	1	6	0,35
D ₃	1/7	1/6	1	0,07

T.I.= 0,02

Fayda yönünden baktığımızda, C_1 kriterine göre D_1 ve D_3 alternatiflerini karşılaştırırken “Köprü kullanımı, feribot kullanımından zaman kriterine göre ne kadar önemlidir?” sorusu sorulmuş. Bu karşılaştırmanın cevabı köprü kullanımı feribot kullanımına göre “7” puanı ile daha fazladır. Yani köprü kullanımı, feribot kullanımına göre daha kuvvetli öneme sahiptir (katkı sağlar).

C_2	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	$\frac{1}{2}$	8	0,36
D_2	2	1	9	0,59
D_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	1	0,05

T.I.= 0,02

C_3	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	4	8	0,69
D_2	$\frac{1}{4}$	1	6	0,25
D_3	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{6}$	1	0,06

T.I.= 0,07

C_4	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	1	6	0,46
D_2	1	1	6	0,46
D_3	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	1	0,08

T.I.= 0

C_5	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	$\frac{1}{4}$	9	0,28
D_2	4	1	9	0,66
D_3	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{9}$	1	0,05

T.I.= 0,11

C_6	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	4	7	0,68
D_2	$\frac{1}{4}$	1	6	0,26
D_3	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{6}$	1	0,06

T.I.= 0,09

C_7	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	1	5	0,46
D_2	1	1	5	0,46
D_3	1/5	1/5	1	0,09

T.I.= 0

C_8	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	5	3	0,64
D_2	1/5	1	1/3	0,11
D_3	1/3	3	1	0,26

T.I.= 0,02

C_9	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	5	8	0,73
D_2	1/5	1	5	0,21
D_3	1/8	1/5	1	0,06

T.I.= 0,07

C_{10}	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	3	7	0,64
D_2	1/3	1	6	0,29
D_3	1/7	1/6	1	0,07

T.I.= 0,05

C_{11}	D_1	D_2	D_3	Özvektör (Öncelik)
D_1	1	6	1/5	0,27
D_2	1/6	1	1/3	0,10
D_3	5	3	1	0,63

T.I.= 0,13

Maliyetler için karar matrisleri

$\bar{A}$	$\bar{B}_1$	$\bar{B}_2$	B_3	Özvektör
$\bar{B}_1$	1	5	7	0,74→ ekonomik
$\bar{B}_2$	1/5	1	2	0,17→ sosyal
$\bar{B}_3$	1/7	1/2	1	0,09→ çevresel

T.I.= 0,01

B_1	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	Özvektör
$\bar{C}_1$	1	7	9	0,77
$\bar{C}_2$	1/7	1	5	0,17
$\bar{C}_3$	1/9	1/5	1	0,06

T.I.= 0.1

B_2	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	Özvektör
$\bar{C}_1$	1	1/3	1/5	0,11
$\bar{C}_2$	3	1	1/5	0,26
$\bar{C}_3$	5	3	1	0,64

T.I.= 0.02

B_3	$\bar{C}_1$	$\bar{C}_2$	$\bar{C}_3$	Özvektör
$\bar{C}_1$	1	3	4	0,62
$\bar{C}_2$	1/3	1	1/3	0,13
$\bar{C}_3$	1/4	3	1	0,25

T.I.= 0.11

$\bar{C}_1$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	1/3	8	0,30
$\bar{D}_2$	3	1	9	0,65
$\bar{D}_3$	1/8	1/9	1	0,05

T.I.= 0.05

$\bar{C}_2$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	1/3	8	0,30
$\bar{D}_2$	3	1	9	0,65
$\bar{D}_3$	1/8	1/9	1	0,05

T.I.= 0.05

$\bar{C}_3$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	1	9	0,47
$\bar{D}_2$	1	1	9	0,47
$\bar{D}_3$	1/9	1/9	1	0,05

T.I.= 0

$\bar{C}_4$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	4	9	0,69
$\bar{D}_2$	1/4	1	8	0,26
$\bar{D}_3$	1/9	1/8	1	0,05

T.I.= 0.09

$\bar{C}_5$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	1	9	0,47
$\bar{D}_2$	1	1	9	0,47
$\bar{D}_3$	1/9	1/9	1	0,07

T.I.= 0

$\bar{C}_6$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	1	9	0,47
$\bar{D}_2$	1	1	9	0,47
$\bar{D}_3$	1/9	1/9	1	0,05

T.I.= 0

$\bar{C}_7$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	3	8	0,65
$\bar{D}_2$	1/3	1	6	0,25
$\bar{D}_3$	1/8	1/8	1	0,06

T.I.= 0.04

$\bar{C}_8$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	3	7	0,65
$\bar{D}_2$	1/3	1	5	0,28
$\bar{D}_3$	1/7	1/5	1	0,07

T.I.= 0.03

$\bar{C}_9$	$\bar{D}_1$	$\bar{D}_2$	$\bar{D}_3$	Özvektör
$\bar{D}_1$	1	1/6	7	0,21
$\bar{D}_2$	6	1	8	0,73
$\bar{D}_3$	1/7	1/8	1	0,05

T.I.= 0.16

A, B, C, D Dört Projenin Tamamlanması ve Ertelenmesi

Önceliklendirme prosedürü ile A, B, C, D projelerinin aşağıdaki Çizelgenin ikinci sütunundaki öncelik vektörüne sahip olduğu ve bu projeleri gerçekleştirme maliyetlerinin de 3ncü sütunda verildiğini kabul edelim.

Projeler	Öncelik Vektörü	Maliyetler (p.b.)	Önceliğin Maliyete Oranı (Öncelik/Maliyet)	Tamamlanma Sırası
A	0,21	10.000	$0,21 \cdot 10^{-4}$	3
B	0,07	100	$7 \cdot 10^{-4}$	1
C	0,42	70.000	$0,06 \cdot 10^{-4}$	4
D	0,30	6.000	$0,50 \cdot 10^{-4}$	2

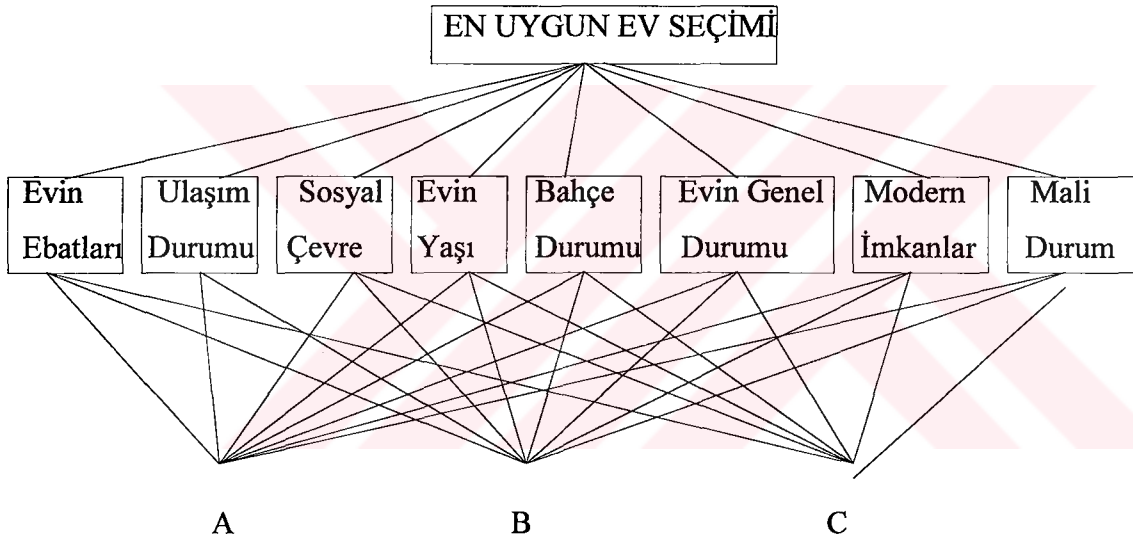
Dördüncü sütun, önceliğin maliyete oranını, beşinci sütun eğer kaynaklar sınırsız ise ve her seferinde bir proje ile çalışılacaksa yani projeler teker teker önerilecekse, dördüncü sütundaki orana karşılık gelen projenin tamamlanma sıralamasını göstermektedir. Dikkat edilirse en düşük önceliğe sahip olan B projesi bu sıralamada birinci olmuştur, fakat B'ye nazaran daha yüksek önceliğe sahip olan D projesi ikinci olmuştur. Projeleri önceliklendirme prosesinde bu dağıtım ilave hiçbir kısıt içermemektedir. Eğer kaynaklar örneğin 72.000 (p.b.) ile sınırlı ise ve bir projenin kısmen yürütülmesinde bir fayda sağlamazsa, bu kaynak dağıtımını çok önemli olacaktır. C projesi, ödünç para alınmadıkça en yüksek önceliğe sahip olmasına rağmen uygulamaya konulamaz, yani tamamlanamaz. Bu proje, diğer projelerden bir kazanç sağlanana kadar ertelenebilir.

LİNEER HİYERARŞİ İÇİN AHY ÖRNEKLERİ

3.1. Günlük Hayattan Bir Örnek: En Uygun Ev Seçimi

AHP'nin uygulama alanlarının çok geniş olduğunu söylemiştik. Günlük yaşantımızda hem en basit problemlere, hem de en karmaşık yapıli problemlere uygulanan AHP çok tercih edilen karar yöntemlerindendir.

Thomas SAATY'nin 1990 yılında "European Journal of Operational Research" dergisinde yayınlanan makalesinde günlük hayatta çoğumuzun karşı karşıya kalmış olduğu ev seçimi ile ilgili basit bir karar problemi ele alınmıştır. Bu probleme ait hiyerarşik yapı Şekil 3.1.'de verilmiştir.



Şekil 3.1 En uygun ev seçimine ait hiyerarşik yapı

Burada 1.seviyede ana hedef en uygun ev seçimi, 2.seviyede yer alan kriterler evin ebatları, ulaşım durumu, sosyal çevre, evin yaşı, bahçe durumu, evin durumu, modern imkanlar, mali durum, 3.seviyede ise karar seçenekleri olarak A, B, C evleri yer almaktadır. Buradaki sekiz kriterin tanımları şu şekildedir:

1. Evin ebatları: odaların genişliği, oda sayısı, evin kapladığı alan, kiler v.b. unsurlardır.
2. Ulaşım durumu: Evin otobüs duraklarına yakın olması, merkezi bir semtlerde bulunuyor olması gibi faktörler.

3. Sosyal çevre: Komşuluk ilişkileri, trafik gürültüsü, bulunduğu semtin güvenliği, komşu binaların fiziksel görünümü.
4. Evin yaşı: Evin kaç sene önce inşa edildiği.
5. Bahçe durumu: Evin bahçesinin genişliği, diğer komşularla paylaştığı alan, bahçe olup olmadığı v.b. unsurlar.
6. Evin genel durumu: Eve ne gibi tamiratlar yapılması gerektiği, duvarların durumu, elektrik tesisatı, temizlik, badana gibi sorunlarla ilgilidir.
7. Modern imkanlar: Doğalgaz, alarm sistemi v.b. özelliklerin bulunması ile ilgilidir.
8. Mali durum: Emlakçı ile anlaşma, ipotek durumları gibi unsurlardır.

Burada sekiz tane kriter olduğundan, her bir kritere göre tüm alternatiflerin seçeneklerin ikili karşılaştırmayla 8 Çizelge, aynı zamanda hedefe göre kriterlerin karşılaştırılmasıyla 1 Çizelge elde edilmiştir. Son olarak her bir alternatifin genel önceliğini belirlemek için aşağıdaki Çizelge 3.1. oluşturulmuştur.

Çizelge 3.1 Alternatiflerin genel öncelikler Çizelgesi

	1 (0,173)	2 (0,054)	3 (0,188)	4 (0,018)	5 (0,031)	6 (0,036)	7 (0,167)	8 (0,333)	Alternatiflerin Genel Önceliği
A	0,754	0,233	0,754	0,333	0,674	0,744	0,20	0,072	0,396
B	0,181	0,055	0,065	0,333	0,101	0,060	0,40	0,650	0,341
C	0,065	0,713	0,181	0,333	0,236	0,193	0,40	0,278	0,263

Bu Çizelgeden elde edilen değerler A= 0,396 B= 0,341 ve C= 0,263 olduğundan, bu evler arasında A evi en yüksek önceliği aldığından tercih edilmiştir (Saaty, 1990).

3.2. Milli Politikalar-Hükümet Kararları

Mehpare TİMOR tarafından 1997 yılında “işletme İktisadi Enstitüsü Dergisi Yönetim” dergisinde yayınlanan makalesinde üst düzey yöneticilerin ve politikacıların da karşılaştıkları karar problemlerinde AHY yöntemini kullandıklarını bir örnekle açıklamıştır. Bu problem, Amerika Başkanı Carter’ın Kasım 1979’dan beri Tahran’da rehine olarak tutulan 53 Amerikalının kurtarılması için yapılacak operasyon hakkında karar verme problemidir. İşte bu operasyonun Analitik Hiyerarşi Yöntemi ile analizi yapılmıştır.

Bu operasyon için 26 Nisan 1980’de hava hareketi yapılması kararlaştırılmıştır. Bu görev, askeri birlikler, uçaklar, helikopterler, uzun bir uçuş ardından çöle iniş, Tahran’a bir sefer düzenlenmesi, rehinelerin kurtarılması ve sonunda güvenli bir yere dönüşü içeren çok karmaşık bir planı içermektedir. Bu operasyonun yapılıp yapılmaması konusunda “operasyonun muhtemel başarısı”nın en önemli faktör olduğu inkar edilemez bir gerçektir. Hiç şüphesiz böyle bir görevde operasyonun başarısının ne şekilde tanımlanacağını belirlemek kolay değildir. Yüksek başarı, askeri birliklerin rehineleri sağ olarak kurtararak kayıpsız şekilde geri dönmesidir. Orta düzeyde başarı ise, az da olsa askeri kayıp, ancak rehinelerin sağ kurtarılmasıdır. Düşük başarı ise, asker ve rehinelerden bazı kayıplar olmasıdır. Savunma Bakanlığı’ndan bazı görevliler “bu tür operasyondan orta düzeyde bir başarı beklenmesi gerektiğini” ifade etmişlerdir.

Çalışmada karar problemi iki ayrı kısımda ele alınmıştır. İlki mevcutlar içinden en iyi asker alternatifin seçilmesi ve muhtemel başarısının belirlenmesidir.

Operasyonun askeri kanadını oluşturan uzmanlar, aşağıdaki faktörleri dikkate almışlardır:

- Transfer: Çöle, Tahran’a, Elçiliğe
- Kuşatma: Rehinelerin yerini belirleme, şaşırtma taktikleri, binaya girme
- Kurtarma: Rehineleri kurtarma, helikopterle götürme ve kalkış.

Amerika Başkanı Carter, danışmanlarının bu konu hakkında fikirlerini almış, son kararı kendisi vermiştir.

Bu arada Başkan Carter’in dikkate aldığı bazı önemli faktörler şunlardır:

- Rehinelerin yaşamları; başkan, rehinelerin sağ salim kurtulmasını ister.
- Carter’in politik yaşamı; Başkan, kararın etkileri ve gelecek seçimlerde yeniden seçilme şansı üzerinde de hassasiyetle durmaktadır.
- Askeri hareketin maliyeti; Rehineleri kurtaracak askeri birliklerdeki askerlerin yaşamlarını kaybetme tehlikesini de düşünmektedir.
- ABD’nin prestiji; Harekatın uluslararası etkisi ve buna bağlı olarak ülkenin imajı üzerindeki muhtemel tesiri önemli bir faktördür.

İşte orta düzeyde bir başarı şansına sahip bir operasyon olacağı düşünülerek buna göre analizi yapılmıştır. Bu probleme ait hiyerarşik yapı Şekil 3.2’de gösterilmiştir.

Bununla ilgili olarak başkanın orta düzeyde bir başarı sağlaması amacıyla dört faktörü ikili karşılaştırması sonucunda bir Çizelge ve orta düzeyde bir başarı şansına sahip böyle bir operasyon için, hareketin yapılması veya yapılmaması kararlarından hangisinin tercih edileceğini belirlemek için 4 Çizelge oluşturulmuş ve öncelikler belirlenmiştir. Buradan hesaplanan öncelikler ile operasyon yapılsın: 0.69 ve operasyon yapılmaz: 0.31 olarak bulunmuştur. Ancak burada Carter’in politik hayatının önemli bir rol oynadığı açıktır. Bu hesaplamaların düşük düzeyde başarı sağlanması halinde hesaplanmasında ise Çizelge 3.2’deki değerler ortaya çıkmıştır.

Çizelge 3.2 Rehine kurtarma operasyonu ile ilgili öncelikler

Faktörler	Orta Düzeyde Başarı Halinde Öncelikler	Düşük Düzeyde Başarı Halinde Öncelikler
Rehinelerin yaşamları	0,15	0,35
Carter’in politik hayatı	0,54	0,39
Askeri maliyetler	0,05	0,10
ABD’nin prestiji	0,26	0,16

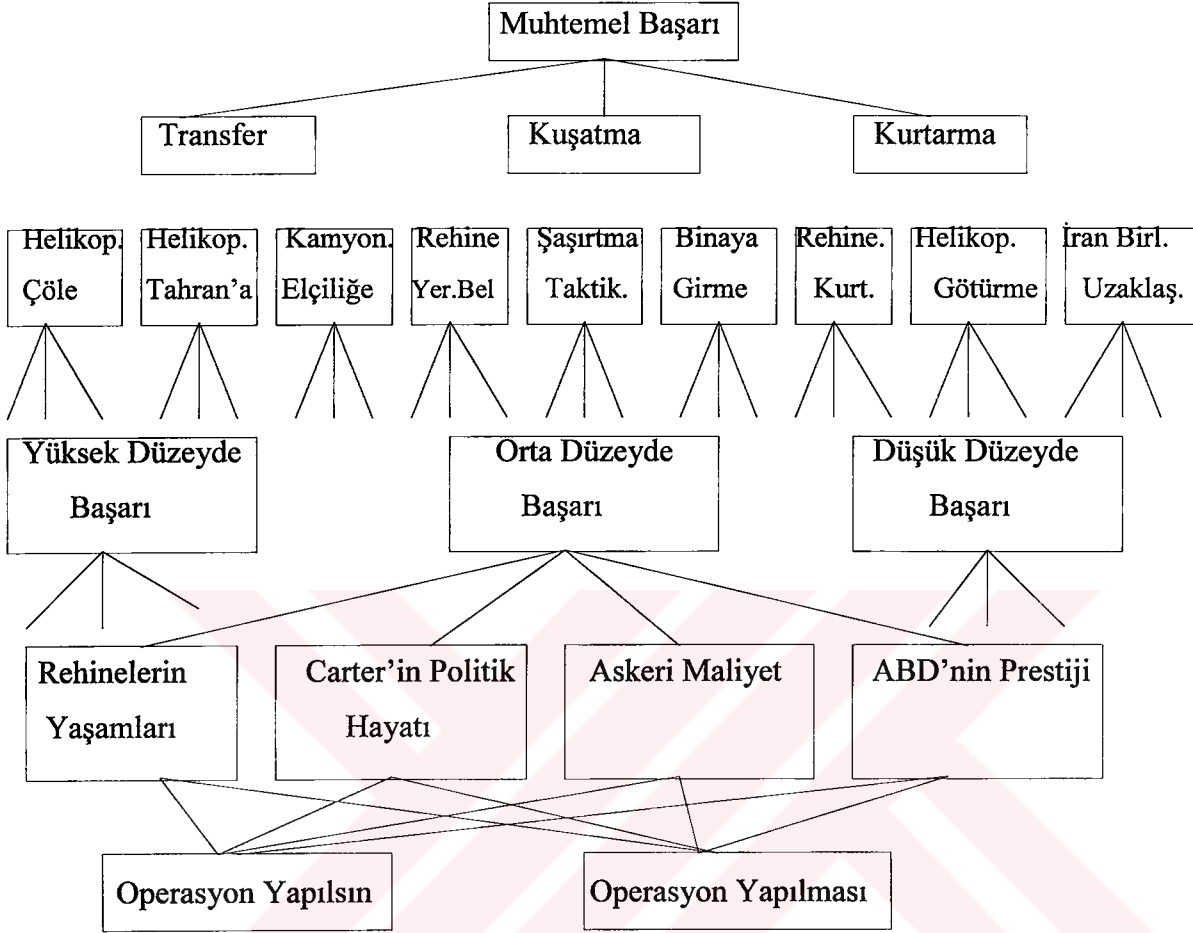
Düşük başarı düzeyinde hesaplanan uzman değerlendirmeleri şu şekildedir:

Operasyon yapılsın : 0.41

Operasyon yapılmaz: 0.59

Bu sonucun ilk sonuçtan farklı olmasının nedeni, rehinelerin yaşamlarının tehlikeye girmesidir. Bu incelemeler sonucunda Carter’in politik hayatının subjektif bir öncelik olduğu ve % 54’lük kendisine ait önceliği göz önünde bulunduracağı görülecektir.

Bu örnek üst düzey kararlarda AHY’nin etkin olarak kullanılabileceğini göstermektedir.



Şekil 3.2 Operasyon yapılıp-yapılmamasına ait hiyerarşik yapı

3.3. Ulaşım Problemleri

AHP'nin uygulandığı bir başka alan ise, ulaşım problemleridir. Daha önce kısım 2.1'de anlatılan ulaşım örneğinde bir nehir geçişinde tünel veya köprü yapılması veya mevcut feribotun kullanıma devam edilmesi alternatiflerinden birinin seçilmesine ait karar problemi ele alınmıştı. Bu kısımda aynı konuyu tekrar etmeyeceğiz. Fakat sadece bu kısımda hazırlanan hiyerarşik yapıların (Bkz.Şekil 2.9 ve Şekil 2.10) lineer olduğunu vurgulayalım. Buna benzer bir başka ulaşım problem de Füsun ÜLENGİN tarafından ele alınmıştır. Avrupa yakasını Anadolu yakasına bağlayan Fatih Sultan Mehmet Köprüsü üzerindeki trafiği azaltmak için bir model geliştirilmiş ve modelin hiyerarşik yapısından yararlanılarak fayda/maliyet analizi yapılmıştır (Ülengin, 1994).

3.7. Pazarlama Sektörüne Uygulama

AHP'nin bir başka uygulama örneği ise pazarlama karması optimizasyonudur. 1993 yılında İrfan SÜER tarafından “Verimlilik” dergisinde yayınlanan makalede AHP pazarlama sektörüne uygulanmıştır. Burada üç çeşit mamul üreten ve pazarlayan X firması pazar payını artırmayı hedeflemektedir. Bunun için de her mamulün pazarlama karmasının yeniden belirlenmesi ve 1 Milyar Liralık pazarlama bütçesinin mamuller ve pazarlama karması değişkenler arasında dağıtılması gibi önemli bir stratejik karar verme problemleriyle ele alınmıştır.

Bu problemin ana hedefi, firmanın hedef pazar payına ulaşmasıdır. Kriterler ise,

1. Mamul Geliştirme: Kalite düzeyi, yenilik ve mamul farklılaştırma ambalajlama, markalama, garanti, sağlanan hizmetler, mamulün hayat döneminin özelliği v.b.
 2. Fiyat: İskonto politikası, kredili satış politikası, sabit fiyat garantileri, mamulün mevcut pazar payı, rekabet gücü, maliyet, talebin özellikleri, fiyat elastikiyeti, ödeme şartları v.b.
 3. Satış Geliştirme: Kişisel satış, reklam, satış özendirme imkanları, satış bölgelerinin büyüklüğü, reklam ve satış artırıcı diğer çabaların maliyetleri, pazarın niteliği, mamulün özellikleri v.b.
 4. Dağıtım: Dağıtım kanalları, fiziksel dağıtım imkanları, müşteri hizmetleri, dağıtım maliyetleri, rekabet v.b.
- şeklindedir.

Hedef Pazar paylarını artırmak için hangi mamule daha çok önem verilecek? Her mamul için pazarlama karması kriterleri yönüyle ne kadar öncelik verilecek?

Bu probleme ait hiyerarşik yapı Şekil 3.3'de verilmiştir. Bu yapıya göre ikili karşılaştırma metodu ile öncelik (üstünlükler) matrisleri oluşturulmuştur. Hiyerarşinin alt kademesinden başlayarak, 12 tane oniki adet alt kriterlere göre üç mamulün ikili karşılaştırma matrisi, 4 tane dört adet kriterlere göre alt kriterlerin ikili karşılaştırma (öncelik) matrisleri, firmanın ana hedefine göre dört kriterlere ait bir tane ikili karşılaştırma (öncelik) matrisi hazırlanmıştır. Bu matrisler sonucunda her bir mamulün genel (karma) önceliğini bulmak için her bir

pazarlama karması kriterinin kendi aralarındaki önceliğini gösteren vektör ile aşağıdaki gibi çarpılır.

$$\begin{array}{c}
 \begin{array}{c}
 \text{A} \\
 \text{B} \\
 \text{C}
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 (1) \quad (2) \quad (3) \quad (4) \\
 \left[\begin{array}{cccc}
 0,538 & 0,567 & 0,136 & 0,600 \\
 0,247 & 0,159 & 0,543 & 0,214 \\
 0,215 & 0,269 & 0,320 & 0,187
 \end{array} \right] \times
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 0,096 \\
 0,083 \\
 0,509 \\
 0,309
 \end{array} \right] =
 \end{array}
 \begin{array}{c}
 \left[\begin{array}{c}
 0,355 \\
 0,380 \\
 0,265
 \end{array} \right]
 \begin{array}{c}
 \longrightarrow \text{A} \\
 \longrightarrow \text{B} \\
 \longrightarrow \text{C}
 \end{array}
 \end{array}
 \end{array}$$

Böylece A mamulüne yaklaşık 0,36, B mamulüne 0,38 ve C mamulüne 0,26 öncelik verilmesi ve kaynak tahsis edilmesi gerekmektedir.

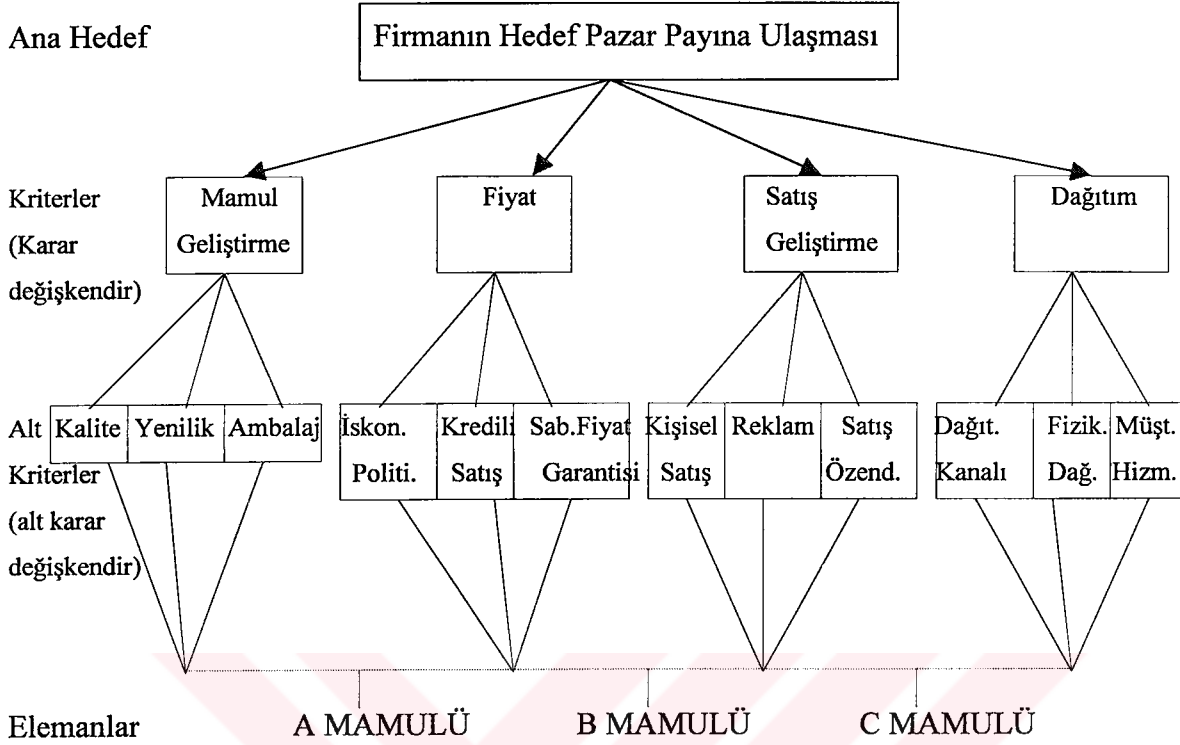
1 Milyar Liralık pazarlama bütçesinin dağıtımı;

A mamulü için 355.000.000

B mamulü için 380.000.000

C mamulü için 265.000.000

olarak belirlenmiştir (Süer, 1993).

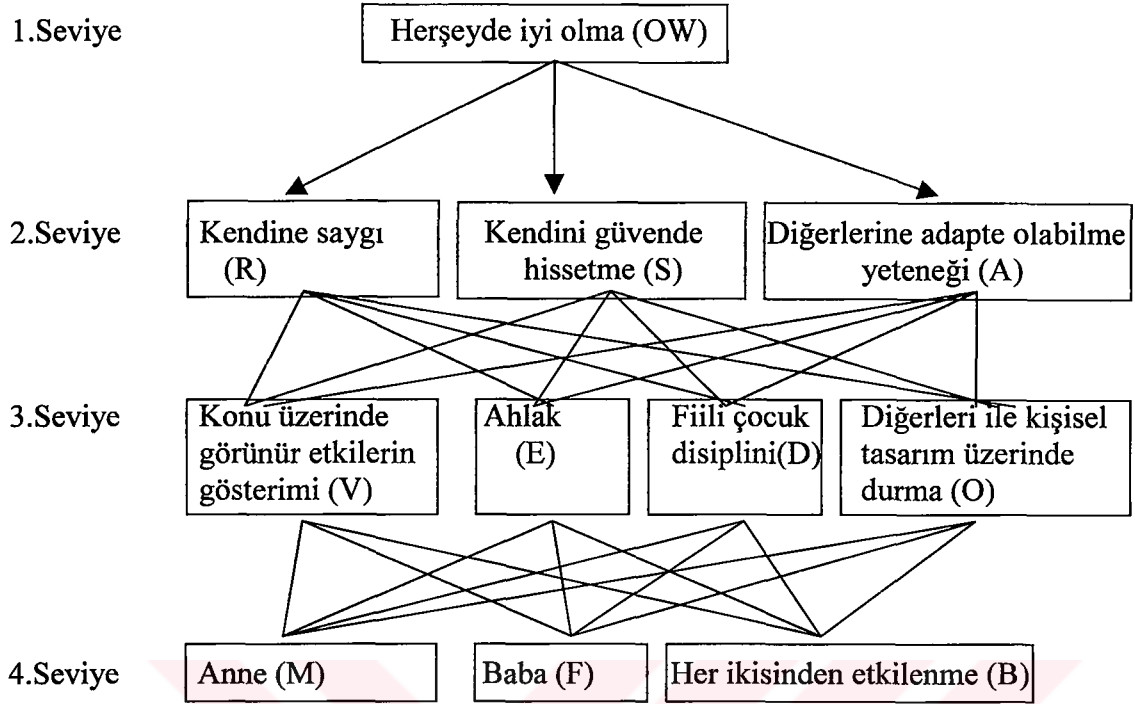


Şekil 3.3 X Firmasının temel karar hiyerarşisi

3.5. Psikolojik Problemlere Ait Bir Örnek

Analitik Hiyerarşi Yöntemi, psikolojik problemler üzerinde de uygulanabilir. Bununla ilgili bir uygulama, Thomas Saaty'nin "The Analytic Hierarchy Process" adlı kitabında yer almaktadır. Bu örnekte, bir çocuğun, bireysel özgüvenini hissettiği, temelinin şiddetlice çürütüldüğü, çocukluğunda sınırlanan bir durumdan dolayı bozulan sosyal düzenini anlatıyor. Bireye çocukluğundaki deneyimleri hakkında sorular sorularak hiyerarşik modeldeki karşılaştırma matrisleri oluşturulmuştur.

Bu psikolojik problemle ilgili hiyerarşik model aşağıdaki şekilde verilmiştir.



Şekil 3.4 Bir çocuğun bireysel özgüveni ile ilgili hiyerarşi

Ana hedefe göre, ikinci seviyedeki kriterlerin özvektörü (öncelik vektörü), a matrisi olarak verilirse;

$$a = \begin{matrix} & \text{OW} \\ \text{R} & 0,701 \\ \text{S} & 0,193 \\ \text{A} & 0,106 \end{matrix}$$

İkinci seviyedeki her bir kritere göre, üçüncü seviyedeki kriterlerin özvektörleri, b matrisi olarak verilirse;

$$b = \begin{matrix} & \text{R} & \text{S} & \text{A} \\ \text{Y} & 0,604 & 0,604 & 0,127 \\ \text{E} & 0,213 & 0,219 & 0,218 \\ \text{D} & 0,064 & 0,064 & 0,120 \\ \text{O} & 0,119 & 0,119 & 0,463 \end{matrix}$$

Hiyerarşide üçüncü seviyedeki her bir alt kritere göre alternatiflerin öncelikleri, c matrisi olarak verilirse;

$$c = \begin{matrix} & \begin{matrix} V & E & D & O \end{matrix} \\ \begin{matrix} M \\ F \\ B \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0,721 & 0,333 & 0,713 & 0,701 \\ 0,210 & 0,333 & 0,061 & 0,097 \\ 0,065 & 0,333 & 0,196 & 0,202 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Sonuç olarak, cba, (3x4) (4x3) (3x1) matrislerinin çarpımından genel öncelik vektörü (karma öncelik vektörü)

$$\text{Anne (M)} = 0,635$$

$$\text{Baba (F)} = 0,209$$

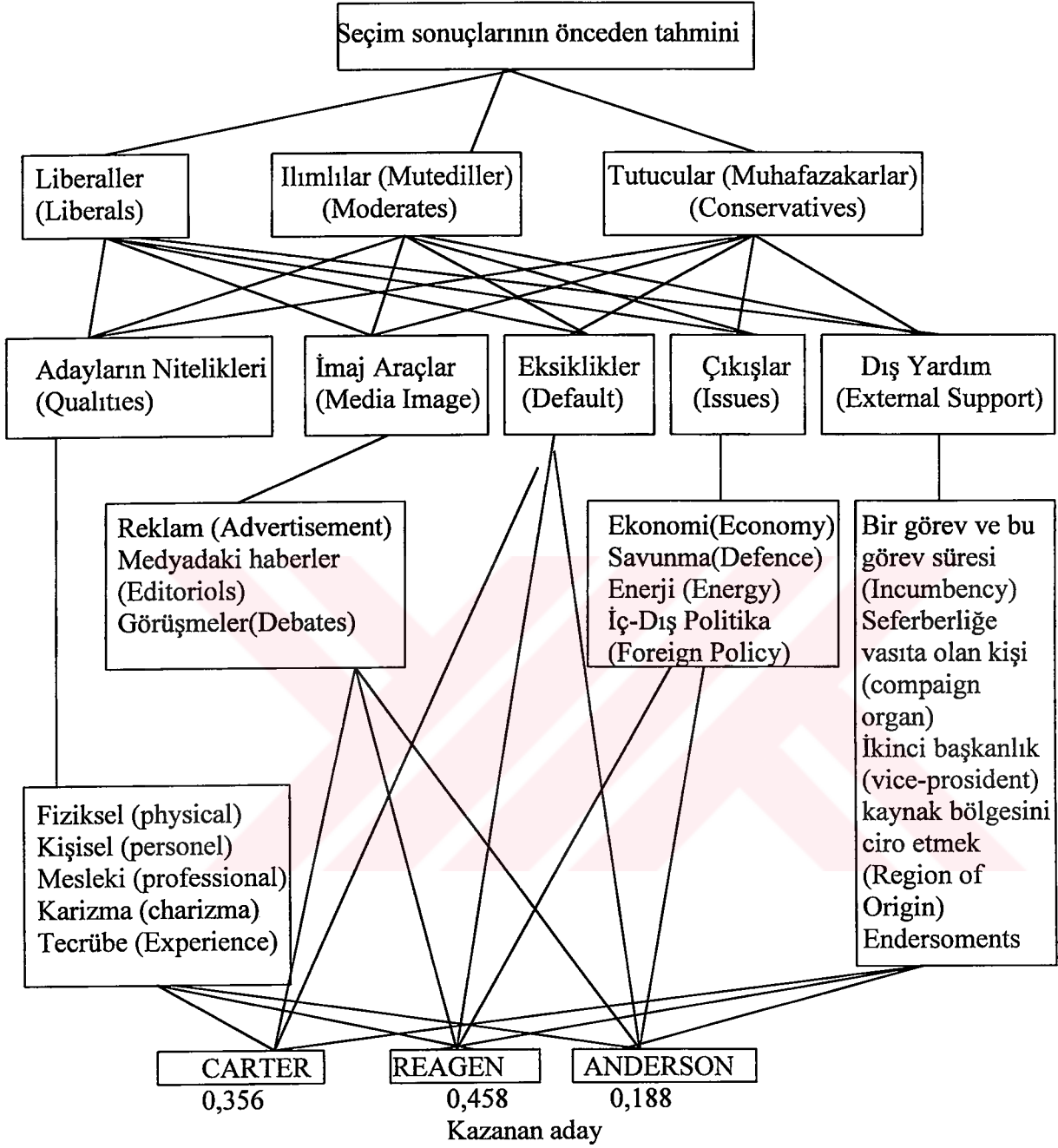
$$\text{Her ikisi (B)} = 0,156 \text{ elde edilir.}$$

Terapinin ikili karşılaştırmalardaki kararlara ve kararlardaki tutarsızlıklara bağlı olacağı görülmektedir.

Bireye ailesel etkileri dengelemek için babasını daha fazla görmesi salık verilir (Saat, 1988).

3.6. Başkanlık Seçimine Ait Örnek

ABD’de 1980 yılında yapılan başkanlık seçimlerinin sonuçlarını önceden tahmin etmek amacıyla AHY kullanılmıştır. Bununla ilgili hiyerarşik yapı aşağıdadır.



Şekil 3.5 1980 yılındaki başkan seçimleri

Birinci seviye belirlendikten sonra, uygulanacak en önemli adım uygun ve uygun olmayan bir adayı belirleyecek faktörleri belirlemektir. Bu konuda çeşitli politik uzmanlar sonuçları yorumlayıp, analiz edebilirler. Bu konu ile ilgili kriterler Şekil 3.6'daki hiyerarşik formda gösterilmiştir.

İkinci seviyede ise seçmenlerin hangi kriterlere göre tercihte bulunacağını belirten, liberaller, ılımlılar, muhafazakarlar şeklinde bir grupta yapılmıştır.

Buradaki nitelikler adayların karakterlerini göstermektedir. Bu konuya yardımcı olması açısından 3.seviyedeki kriterlerin tanımları aşağıdaki Çizelgede verilmiştir.

Üçüncü seviyede, bir adayın başarısına yardımcı olan faktörler listelenmiştir. Bu faktörler nitelikler, imaj araçları, eksiklikler, çıkışlar ve dış yardımlar şeklinde belirlenmiştir.

Çizelge 3.3 3'ncü seviyedeki kriterlerin tanımı

Nitelikler

Fiziksel	:Yaş, ağırlık, görünüş, boy
Karizma	:“Şahsiyet”, cazibe, akıl
Tecrübe	:Özel sektörde veya politik alanda karar verme/ ilgili kariyerde tecrübe
Kişisel	:Tutarlılık, doğruluk, güvenilirlik, profesyonel davranış

İmaj araçları

Reklam	:Televizyon, radyo, basın
Haberler	:Açıkça onaylama ve televizyon, basın, radyodaki haberler
Tartışmalar	:Çeşitli seçmenler cemiyeti ile tartışmaları televizyon, radyo ve basında göstermek
Eksiklikler	:Bu kriter diğerleri gibi parçalanmamıştır.

Çıkışlar (Konular)

Ekonomi	:Enflasyon, işsizlik
İç-Dış Politika:	
Enerji	:
Savunma	:

Burada kısmen adaylar için, demokratlar da Carter ve Cumhuriyetçiler için Reagan düşünülebilir.

Bu hiyerarşik yapıya uygun olarak yapılan ikili karşılaştırmalar sonucunda

	Liberal	Orta	Muhafazakarlar
Çıkışlar	43,9 %	46,5 %	51,6 %
Nitelikler	20,5 %	25,4 %	25,8 %
Eksiklikler	18,4 %	13,4 %	11,6 %
Dış Yardım	10,6 %	8,0 %	6,9 %
İmaj Araçları	6,6 %	6,7 %	4,0 %

Niteliklere göre alt faktörlerin karşılaştırılması ile öncelikler

Mesleki	48,2 %
Tecrübe	27,3 %
Kişisel	13,9 %
Karizma	7,3 %
Fiziksel	3,4 %

İmaj araçlarına göre alt faktörlerin karşılaştırmaları

Tartışma	60,3 %
Haberler	31,5 %
Reklam	8,2 %

Çıkışlar (konular) faktörüne göre elde edilen öncelikler

Ekonomi	67,3 %
Savunma	19,5 %
İç-Dış Politika	8,2 %
Enerji	5,1 %

Her seviye elemanları için yapılacak karşılaştırmalar ile liberaller için genel adayların sıralaması

Carter	Reagen	Anderson
29,1 %	12,4 %	58,6 %

Orta için elde edilen genel görünüş

Carter	Reagen	Anderson
57,0 %	24,9 %	18,1 %

Muhafazakarlar için elde edilen adayların öncelikleri

Carter	Reagen	Anderson
10,0 %	74,6 %	15,3 %

Diğer faktörler ve alt faktörler için yapılan hesaplamalar ile adayların genel sıralaması ve önceliği

Carter	Reagen	Anderson
35,6 %	45,8 %	18,8 %

elde edilmiştir.



4. GERİ BESLEMELİ SİSTEMLERDE ÖNCELİKLER

4.1. Giriş

Şimdiye kadar problemler hiyerarşik olarak üst seviyeden alt seviyelere doğru ya da tersi şeklinde hiyerarşik olarak modellendi, hiyerarşinin genel amacına göre veya daha yüksek seviyelerdeki elemanlara göre hiyerarşinin farklı seviyelerindeki elemanların önceliğini ölçen bir teori geliştirildi.

Bu bölümde seviyelerin artık daha yüksek daha düşük (yani üst-alt) olarak etiketlenemediği (şekillendirilemediği) sistem problemleriyle ilgileneceğiz. Bu etiketlenememe nedeni, bir seviyenin diğer seviyelerle direkt ya da indirekt bir şekilde hem basan hem de basılan bir seviye olmasından dolayıdır. Böyle sistemlere geri beslemeli sistemler (system with feedback) denilmektedir. Bu sistemler, düğümleri seviyelere ya da bileşenlere karşılık gelen bir network (şebeke) olarak gösterilebilir. Bir düğümdeki (seviyedeki) elemanlar, herhangi bir başka düğümün elemanlarının birkaçını ya da tümünü etkileyebilir. Burada amacımız böyle sistemdeki öncelikleri incelemektir. Esas olarak diğer düğümün her bir elemanına göre bir düğümdeki bütün elemanların birlikte ele alındığı - yani bu seviyeler arasında tam bir hiyerarşi emsali (şekli)- sistemlerle ilgileneceğiz.

İlk bakışta hiyerarşiden daha karmaşık görünen bu yapı ile niçin ilgilenildiği merak edilebilir. Bunun nedeni hiyerarşi ile bir sistemin yapısının tam yansıtlamadığıdır. Gereğinden fazla karmaşık bir yapı bir hiyerarşi olarak temsil edilemez. Hiyerarşi ile sunulan sadelik bazen aldatıcı olabilir. Çoğu sosyal bilim problemleri bu kategoriye girer. Örneğin literatürde yer alan organizasyon teorisindeki son çalışmalar pratikte hiyerarşik olmayan organizasyon formlarını önermektedir. Yani kişi, bir üretim sisteminin farklı bileşenlerinin pekçoğunda ya da tamamında görev alabilir.

Bazı karmaşık problemler hem bir hiyerarşi, hem de bir döngü (loop) formu basit bir network yardımı ile analiz edilir. Böyle basit network “holarşi” (holarchy) olarak adlandırılır. Her iki yol ile elde edilen sonuçlar oldukça yakındır ya da en azından bazı durumlarda aynı sonuçları vermektedir (Saat, 1988).

Diğer bir deyişle, daha önce Aksiom 3’de verilen ifadenin yumuşatıldığı problemler geri beslemeli sistem veya süpermatris tekniği olarak verilmektedir. Konunun matematik yapısı aşağıda basit bir örnekle açıklanmıştır.

A_1, A_2, A_3, A_4 gibi dört alternatifin her birine ne kadar para yatırılacağını seçme problemini ele alalım. Problemin kriterleri C_1, C_2, C_3, C_4 gibi dört yılın her birisindeki getirilerdir. Faizin olmadığı kabul edilirse, Çizelge 4.1’de görüldüğü gibi A_2 alternatifi en iyi seçimdir.

Çizelge 4.1 Yatırım örneği için veriler

Alternatifler	Kriterler				Toplam Getiri	Relatif Getiri (Görelî Getiri)	Sıralama
	C_1	C_2	C_3	C_4			
A_1	1	9	1	3	14	0,2000	4
A_2	9	1	9	1	20	0,2857	1
A_3	8	1	4	5	18	0,2571	2
A_4	4	1	8	5	18	0,2571	2

Probleme direkt olarak hiyerarşik kompozisyon prensibi uygulanırsa, kriterlerin (yılların) her biri faiz olmadığından eşit olarak ağırlık alacaktır. Her bir alternatifin elde edilen relatif ağırlıkları Çizelge 4.2’de verilmiştir. A_1 ve A_2 alternatifleri arasındaki sıranın yer değiştirdiğine dikkat edelim. Burada AHY’nin yanlış hesaplama yaptığı sonucu düşünülebilir.

Burada yanlış olan nedir? Sorusu sorulabilir.

Çizelge 4.2 Yatırım örneği için hiyerarşik kompozisyon

Alternatifler	Kriterler				Toplam Getiri	Sıralama
	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄		
A ₁	1/22	9/12	1/22	3/14	0,264	1
A ₂	9/22	1/12	9/22	1/14	0,243	4
A ₃	8/22	1/12	4/22	5/14	0,246	2
A ₄	4/22	1/12	8/22	5/14	0,246	2

Bu sorun yukarıdaki örnek probleme bu durumda hiyerarşik kompozisyon prensibinin uygulanamamasından kaynaklanmıştır. Eğer uygulanırsa, ilk önce kriterlerin (yılların) ağırlığı sonra her bir yıla göre alternatiflerin ağırlığı bulunabilir. Bunu yapmak için de kriterlerin önceliği ya da ağırlığı alternatif yatırımlardan bağımsız olması gerekir. Fakat bu örnekte kriterler yatırımlara bağımlıdır. Faiz olmamasına rağmen, her bir yıl için toplam getiri farklıdır. Bunu görmek için, problemde yatırım alternatiflerini kriter olarak, yılları da alternatif olarak ele alarak problemde değişiklik yapalım. Bu durumda örneğin aşağıdaki soruyu soralım. “1.alternatif için hangi yıl en iyi getiri sağlar?” Eğer her bir alternatif ve her bir yıl için cevap aynı ise (örneğin 1’inci yıl daima bütün alternatifler için en az ikinci yıl kadar iyidir, v.s.), o halde yılların öncelikleri alternatiflerden bağımsız olarak üretilebilir. Şimdiki durumda ise, cevaplar Çizelge 4.3’de gösterildiği gibi değişik alternatiflere bağımlıdır.

Çizelge 4.3 Alternatiflere göre yılların karşılaştırılması

Yıllar (Kriterler)	Her bir alternatife göre ağırlıklar			
	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
C ₁	1/14	9/20	1/18	3/18
C ₂	9/14	1/20	9/18	1/18
C ₃	8/14	1/20	4/18	5/18
C ₄	4/14	1/20	8/18	5/18

Bu durumda hangileri kriter ve hangileri alternatiflerdir. Aslında bir hiyerarşiden ziyade feedback'i (geri beslemeli) olan bir sistem için bunu cevaplamak imkansızdır. Yani yılların önceliklerini belirlemede alternatiflere bağımlıdır ve tersi de doğrudur. Yani alternatiflerin önceliği de yıllara bağımlıdır. Süpermatris tekniği ile nesneler (yıllar ve yatırımlar) iki sınıfa ayrılır ve Çizelge 4.4'de gösterildiği gibi daha sonra ayrıntılı olarak açıklanacak bir süpermatris kurulur. Burada her bir elemanın genel önceliği, matrisi kuvvetlerine yükseltme ile elde edilir. Bu matris Çizelge 4.5'te girilmiştir.

Çizelge 4.4 Yatırım örneği için süpermatris W

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
C ₁	0	0	0	0	1/14	9/20	8/18	4/18
C ₂	0	0	0	0	9/14	1/20	1/18	4/18
C ₃	0	0	0	0	1/14	9/20	4/18	8/18
C ₄	0	0	0	0	3/14	3/20	5/18	5/18
A ₁	1/22	9/12	1/22	3/14	0	0	0	0
A ₂	9/22	1/12	9/22	1/14	0	0	0	0
A ₃	8/22	1/12	4/22	5/14	0	0	0	0
A ₄	4/22	1/12	8/22	5/14	0	0	0	0

Çizelge 4.5 Yatırım örneği için $\lim_{k \rightarrow \infty} W^{2k+1}$

	C ₁	C ₂	C ₃	C ₄	A ₁	A ₂	A ₃	A ₄
C ₁	0	0	0	0	0,3143	0,3143	0,3143	0,3143
C ₂	0	0	0	0	0,1714	0,1714	0,1714	0,1714
C ₃	0	0	0	0				
C ₄	0	0	0	0	0,3143	0,3143	0,3143	0,3143
					0,2000	0,2000	0,2000	0,2000
A ₁	0,2000	0,2000	0,2000	0,2000	0	0	0	0
A ₂	0,2857	0,2857	0,2857	0,2857	0	0	0	0
A ₃	0,2571	0,2571	0,2571	0,2571	0	0	0	0
A ₄	0,2571	0,2571	0,2571	0,2571	0	0	0	0

Görüldüğü gibi yıllara ait genel öncelikler (0,3143, 0,1714, 0,3143, 0,2000) vektörü ile verilir. Bu vektör dört yıl için toplam yatırım ile yıl başına toplam yatırımın normalizasyonu ile aynıdır. Yani

$$(22/70, 12/70, 22/70, 14/70)$$

ile aynıdır. Yine yatırımların nihai (final) öncelikleri de Çizelge 4.3'de listelenen öncelikler ile aynıdır. AHY'yi uygulamada karar verici, bütün karar problemlerinin hiyerarşiler şeklinde modellenemeyeceği konusunda çok dikkatli olmalıdır. Süpermatris tekniği ihtiyaç duyulduğunda hiyerarşik bir yapıdan ayrılmaya imkan sağlayan bir tekniktir. Bu süpermatris tekniğine ne zaman ihtiyaç duyulur sorusunu cevaplamak için basit bir test, hiyerarşide mevcut seviyedeki bir elemana göre bir alt seviyedeki elemanları karşılaştırmada ters soru sormaktır. Eğer soru anlamlı ise ve mevcut seviyenin elemanlarını (alternatiflerini) kriter olarak almaya müsaade ediyorsa, sistem geri beslemeli bir sistemdir (Golden, 1989) (feed-back with system) ve süpermatris tekniği kullanılmaktadır.

Bu bölümde, bölüm 4.2'de herhangi bir grup karar verme tekniği ya da herhangi bir başka yolla elde edilen elemanları, seviyeleri olan bu sisteme dönüştürmede graph teori kavramlarına dayanan bir metot verilecektir. Aynı seviyede ya da sınıftaki elemanları, onların ölçümlerinin yakınlıklarına bağlı olarak gruplama gibi başka metodlar da vardır. Fakat bu metodlar burada incelenmeyecektir. Bununla beraber öncelikleri hesaplamadan önce, elemanları teşhis etmek ve gruplamak gereklidir.

Bölüm 4.3'de geri beslemeli sistemlerde öncelik ölçümü kavramı, bölüm 4.4'de böyle ölçümü gerçekleştirmek için süpermatris kavramı, ayrıca bu yaklaşımın özel bir durumu olan hiyerarşik kompozisyon prensibi verilecektir. Bölüm 4.5'de, etki (impact) ve mutlak öncelikler ve bunların limit değerleri tanımlanacak, varlıkları için koşullar, değişik tipteki sistemler için bunların elde ediliş metodları verilecektir.

Kısım 4.6'da bu fikirleri açıklayıcı örnekler yer alacaktır.

4.2.Sistemleri Yapılandırmada Ulaşılabilirlik Matrisi (Reachability Matrix in Structuring System)

Bu konuda ilişkileri vermek üzere, elimizde bir elemanlar kümesinin olduğunu varsayalım. Modellenecek bu elemanlar kümesi tündengelim bir mantıkla (deductive logic), tesadüfi gözlem, amprik veriler (emprical data), beyin fırtınası (brainstorming) veya bu kaynakların herhangi birisi ile elde edilebilir. Bu metodun en önemli kısmı orjinal elemanlar kümesini tanımlamanın, prosesin normal ve en önemli bir parçasını oluşturduğudur. Sistemin kısmen veya tamamen tanımlanması iki farklı fakat ilişkili iki form;

(1) Bir binary (0-1) matris

(2) İlişkilerin geometrik gösterilişi veren yönlü bir graph ile yapılır.

Önceliklerin graph teorisi ile ilgili yorumları EK-2’de verilecektir.

Elemanlar kümesinin N ile gösterildiğini kabul edelim. “.....,’ye bağlıdır.” bağıntısı yardımıyla, evet cevabı “1”e, hayır cevabı “0”a karşılık gelmek üzere bir B binary (0-1) matrisi doldurulur. Evet ya da hayır cevabına nasıl karar verileceği mevcut verilere, yargılara ya da her ikisine de bağlıdır. Böyle $B = \{b_{ij}\}$ binary matrisi;

$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{i,j'ye bağlı ise} \\ 0 & \text{aksi halde} \end{cases} \quad (4-1)$$

şeklinde tanımlanır.

Matris tamamen doldurulduktan sonra, geçişkenliğin bozulup bozulmadığını anlamak amacıyla geçişkenlik kontrolü yapılmalıdır. Eğer geçişkenlikte bozukluk olduğu tespit edilirse, bozukluğu ortaya çıkarmak ve düzeltmek amacıyla ilgili elemanlar incelenmelidir. B matrisi elde edildikten veya direkt verildikten sonra, I birim matris olmak üzere $(I+B)$ binary matrisi oluşturulur.

$$(I+B)^{k-1} \leq (I+B)^k = (I+B)^{k+1} \quad (4-2)$$

şartını sağlayacak şekilde, yani $(I+B)^{k-1}$ matrisindeki her bir eleman, $(I+B)^k$ matrisinde ona karşılık gelen elemandan daha küçük ya da eşit, $(I+B)^k$ ve $(I+B)^{k-1}$ matrislerinde ise karşılıklı elemanlar eşit olacak şekilde en küçük k tamsayısının mevcut olduğunu göstermek mümkündür. Yukarıda yazılan bağıntının sağ tarafındaki matrise “ulaşılabilirlik matrisi” (reachability matrix) denir. Bu matrise ait çeşitli tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım 3.1: Bir yönlü graph'ın ulaşılabilirlik matrisinin elemanları, eğer bir elemandan diğerine bir yol ile ulaşırsa 1, aksi halde 0 olan bir binary matris şeklinde tanımlanır. Bir ulaşılabilirlik matrisinin kullanımı, H 'nın seviyeler kümesine bir parçalanışını ve ayrıca her bir seviyenin de mutlaka ayrık olması gerekmeyen alt kümelerine parçalanışını gösterir.

Tanım 3.2: Yönlü graph üzerinde h_i 'den h_j 'ye bir yol ile gidilebilir ise, h_j elemanına h_i elemanından ulaşılabilir denir.

Tanım 3.3: Eğer h_j 'den h_i 'ye ulaşmak mümkün ise, h_j elemanına h_i 'den önce gelir (antecedent) denir.

Bir H kümesinden iki tür küme bulunabilir. Birincisi ulaşılabilirlik kümesi, diğeri de önce gelen elemanlar kümesidir. Bu kümeler sırası ile $R(h_i)$ ve $A(h_i)$ olsun.

$R(h_i)$, $h_i \in H$ elemanının ulaşılabilirlik kümesidir ve h_i elemanından çıkan yollar üzerinde bulunan H 'ın tüm elemanlarından oluşmaktadır. Yani

$$R(h_i) = \{h_j \in H \mid (I+B)^k \text{ matrisinde } (i,j) \text{ elemanı } 1 \text{ 'dir.}\} \quad (4-3)$$

$A(h_i)$, h_i elemanından önce gelen elemanlar kümesidir, h_i 'yi içeren, fakat h_i 'den çıkmayan yollar üzerindeki H 'nin bütün elemanlarından oluşur. Yani

$$A(h_i) = \{h_j \in H \mid (I+B)^k \text{ matrisinde } (j,i) \text{ elemanı } 1 \text{ 'dir.}\} \quad (4-4)$$

$A(h_i) = A(h_i) \cap R(h_i)$ şartını sağlayan h_i elemanlarının kümesine H 'nin geri kalan elemanlarının hiçbirisinden ulaşamaz ve böylece h_i elemanlarının kümesi bir hiyerarşinin seviyesi şeklinde gösterilebilir.

Bütün seviyeleri kurmak için sadece aşağıdaki iteratif prosedürü uygulamak gereklidir.

Adım 1: Elemanları h_i , $R(h_i)$, $A(h_i)$ ve $R(h_i) \cap A(h_i)$ olan bir Çizelge oluşturunuz.

Adım 2: Çizelgede $A(h_i) = R(h_i) \cap A(h_i)$ şartını sağlayan elemanları bulunuz. Bu elemanlar birinci seviyeyi oluşturur.

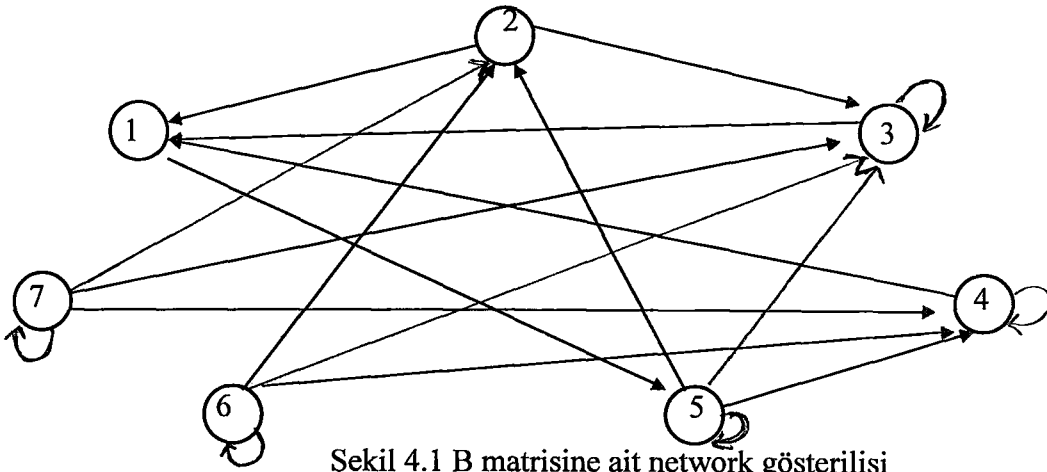
Adım 3: Bu kümeyi Çizelgeden siliniz ve 2nci adımı uygulayınız. Bu şekilde devam ediniz.

Bu proses, faydalı olduğu kadar, bütün kavramsal ilişkileri göstermek için, genellikle yukarıda tanımlandığı gibi bir hiyerarşi vermez. Bunun yerine bir network (şebeke) meydana getirir. Böylece;

- i) Birinci seviyede sadece bir eleman olmayabilir.
- ii) Birinci seviyedeki bütün elemanların sadece ikinci seviyedeki elemanlar ile bağlantılı olması gerekmez.
- iii) Ara seviyelerde sadece bir eleman bulunabilir.

Bu konu ile ilgili olarak aşağıdaki B matrisi verilmiş olsun.

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

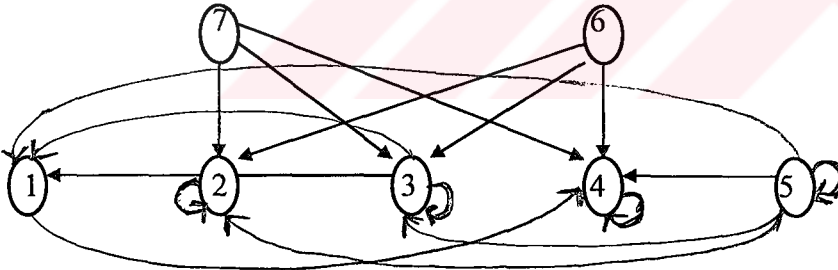


Şekil 4.1 B matrisine ait network gösterilişi

(I+B) matrisinden elde edilen ulaşılabilirlik matrisi

$$(I+B)^3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir.



Şekil 4.2 Metod uygulandıktan sonra network gösterilişi.

h_i	$R(h_i)$	$A(h_i)$	$A(h_i) \cap R(h_i)$
$i=1,2,3,4,5$	1,2,3,4,5	1,2,3,4,5,6,7	1,2,3,4,5
h_6	1,2,3,4,5,6	6	6
h_7	1,2,3,4,5,7	7	7

$A(h_6)$ ve $A(h_7)$ sırası ile $A(h_6) \cap R(h_6)$ ve $A(h_7) \cap R(h_7)$ ile aynıdır. Yani

$$A(h_6) = A(h_6) \cap R(h_6)$$

$$A(h_7) = A(h_7) \cap R(h_7)$$

dir. Buradan birinci seviye h_6 ve h_7 elemanlarından oluşmuştur.

Yani birinci seviye: (h_6 ve h_7)'dir.

Daha önce açıklanan prosedüre uygun olarak ikinci seviyeyi elde etmek için Çizelgeden h_6 ve h_7 'nin bulunduğu kısımlar silinir. Böylece (h_1, h_2, h_3, h_4, h_5) ikinci seviyeyi oluşturur. O halde,

$$H = \{1,2,3,4,5,6,7\} = \{6,7 \quad 1,2,3,4,5\}$$

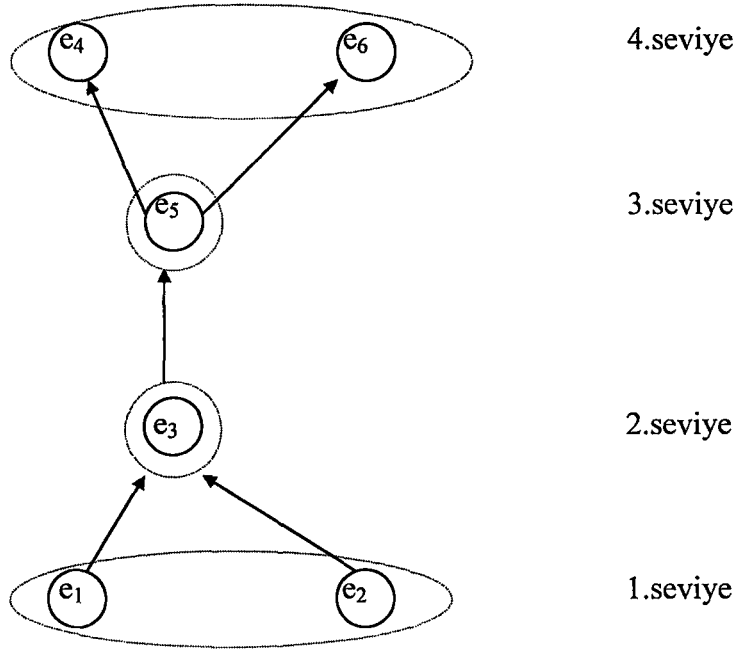
yazılabilir. Şekil 4.1 ve Şekil 4.2'de, metod uygulanmadan önceki ve uygulandıktan sonraki network'lar gösterilmektedir.

Bu tekniği uygulama ile diğerlerine hiyerarşi dediğimiz fakat şimdi iki seviyeli bir network diyeceğimiz, yani

1.Seviye $\{6,7\}$

2.Seviye $\{1,2,3,4,5\}$

olan bir network elde edilmiştir.



Şekil 4.3 Örnek bir network

Yukarıda Şekil 4.3’de verilmiş olan network,

$$B = \begin{matrix} & \begin{matrix} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 \end{matrix} \\ \begin{matrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \\ e_4 \\ e_5 \\ e_6 \end{matrix} & \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

matrisine metodun uygulanması ile elde edilir. B matrisinin ulaşılabilirlik matrisi

$$(I+B)^4 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

dir. Çünkü $(I+B)^4 = (I+B)^5$

e_i	$R(e_i)$	Ae_i	$R(e_i) \cap Ae_i$
1	1,3,4,5,6	1*	1*
2	2,3,4,5,6	2*	2*
3	3,4,5,6	1,2,3	3
4	4	1,2,3,4,5	4
5	4,5,6	1,2,3,5	5
6	6	1,2,3,5,6	6

Yukarıdaki Çizelgeden görüldüğü gibi $A(e_1) = R(e_1) \cap Ae_1$ ve $A(e_2) = Ae_2 \cap Ae_2$ 'dir. Buradan birinci seviye $\{e_1, e_2\}$ olarak bulunur.

e_1 ve e_2 'nin bulunduğu kısımlar Çizelgeden silinir ve işlemler tekrarlanır.

$A(e_3) = Ae_3 \cap R(e_3)$ olduğundan $\{e_3\}$ ikinci seviyeyi oluşturur. $\{e_3\}$ silinip işleme devam edilirse,

$A(e_5) = Ae_5 \cap R(e_5)$ olduğundan $\{e_5\}$ ile üçüncü seviye bulunur. Dördüncü seviye ise işlem tekrarı sonucunda $\{e_4, e_6\}$ olarak bulunur.

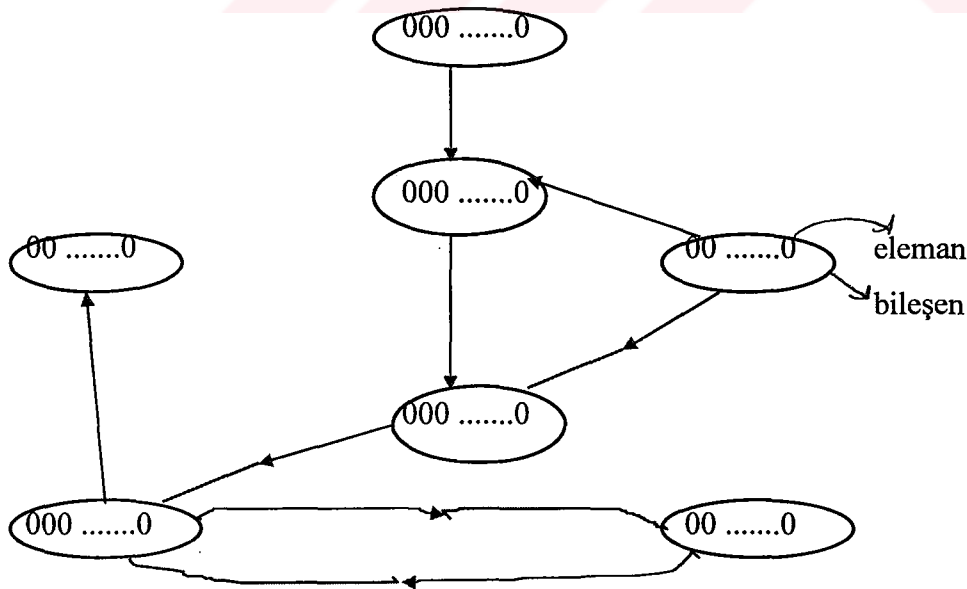
4.3. Geri Beslemeli Sistemlerde Öncelik Ölçümleri

Analitik hiyerarşi yaklaşımında, ikili karşılaştırmalarda, her bir kritere göre alternatiflerin baskınlık veya görelî (relatif) önceliklerini hesaplamada ölçek kullanılırdı. Her bir kritere göre alternatiflerin relatif değerleri, ikili karşılaştırmalar matrisinin esas özvektör (principal eigenvector) çözümü ile belirlenmişti.

Bu kısımda AHY'nin geri beslemeli sistemlere bir genelleştirilmesi verilecektir. Bu genelleştirme yönlü bir network ile temsil edilebilir.

Ele alınan networkun türünü tanımlamak için, hiyerarşinin bir seviyesindeki elemanların komşu seviyenin elemanlarına göre öncelik ölçümünün, yönlü iki parçalı grafa (directed bipartite graph) sebebiyet verdiği hususu önemlidir. İki parçalı graphlarının tümü tam olan hiyerarşiye “tam hiyerarşi” denir. Bu aynı zamanda uğraştığımız genel tam olmayan hiyerarşinin özel bir durumudur. İki parçalı graph, bir seviyenin, daha yüksek ya da basan-komşu seviyedeki elemanlara göre daha düşük ya da bir alt seviyenin, bütün elemanları arasındaki bağlantıları tanımlar. Hangi seviyenin, hangi seviyeyi bastığını göstermek istersek, daha düşük seviyeden daha yüksek seviyeye doğru basit bir ark çizmek yeterlidir. Böylece hiyerarşi zincir ya da daha kesin olarak bir yol ile temsil edilebilir. Çünkü arkların üzerinde bir yönlenme mevcuttur.

Bir sistem için, iki bileşen arasındaki etkileşim yani hiyerarşinin seviyeleri arasındaki etkileşim, tam ya da tam olmayan iki parçalı graptta bileşenler arasında baskınlık sırasını göstermek için ark kullanalım. Burada iki bileşen arasında zıt yönde giden arklar çizmek mümkün olabileceği gibi, karşılıklı bağımlılık durumunda bir bileşende bir döngü çizmek bile mümkündür. Bu bir hiyerarşi için de mümkündür. Herhangi bir durumda, önceliklendirme için bir sistemin bileşenlerinin basit bir şekilde gösterilişi bir yönlü network meydana getirir. Böyle bir network Şekil 4.4’de verilmiştir.



Şekil 4.4 Birbirine bağlı bir hiyerarşi

Bu gösteriliŖe süpermatrisin kuruluşunda ihtiyaç duyulur. Bu matrisin kuvvetlerini alma, bu gösterilişte belirtilen uzunluktaki yollar boyunca öncelikleri verir.

Bu tür sistemlerde ve hiyerarşilerde öncelikleri incelemek için birleştirilmiş çatı olarak hizmet gören süpermatrisi tanımlayalım. Yine bu sistemlerde öncelikler için genel kompozisyon prensibi geliştirelim. Bu prensibin özel hali, daha önce hiyerarşik kompozisyon prensibi olarak ifade edilmiştir.

Geri beslemeli bir sistem için, bileşenler arasında öncelik kompozisyonu fikri özel bir dikkat gerektirir. Bu durumda seviyeden seviyeye ardışık olarak kompozisyon oluşturmada referans olarak bir üst seviye genellikle mevcut değildir. Sistemin elemanları tek bir yoldan daha fazla yol ile etkileşebilir. Anlamlı şekilde öncelik ölçümleri elde etmek için, bütün yolların düzgün bir şekilde nasıl ele alınacağını bilmeye ihtiyaç vardır. Bir sistemin herhangi bir bileşeninin diğer bileşenlerine göre öncelikleri, onları bağlayan yollar ve döngüler boyunca tek olmayan (non-unique) bir şekilde ölçülmüş olabilir. Örneğin, bir döngü boyunca öncelikler, döngü etrafında sadece bir kez, ya da iki kez, ya da daha fazla giderek ölçülebilir. Bir sistem için, elemanlarının bir bütün olarak önceliklerinin nihai, yani limit kümesini bilmek faydalıdır. Elemanlar bileşenlerine düzgün bir şekilde kümelenemediğinde bunu yapmak gerekli olabilir. Bu durumda sistemdeki bütün elemanların o sistemin her bir elemanına göre relatif önceliklerinin bir ölçümü elde edilir, bu bir stokastik matrisi verir. Stokastik matrik, sütunlarının toplamı 1 ve bütün elemanları non-negatif olan matristir. Sütunlar, sistemin her bir elemanına göre sistemin bütün elemanlarının ikili karşılaştırma matrislerinin özvektörleridir.

Süpermatris metodu, bu duruma uygulanabilir, fakat açıklamak için sistemin ayrıştırılabilir olduğu durumu ele alalım. Yönlü network'ün arkları sistem bileşenlerinin etkileşmelerini göstermek üzere, sistem bağımsız bileşenlerine gruplanabiliyorsa, sistem ayrıştırılabilir bir sistemdir. Bu durumda, bir hiyerarşide olduğu gibi, komşu bileşenler arasında öncelikler türetilir, sistemde bileşenlerin önemleri olarak bileşenlerin öncelikleri ayrı ayrı bulunur ve bu öncelikler her bir bileşene karşılık gelen özvektörleri ağırlıklandırmak için kullanılır, böylece bir sütun stokastik matris elde edilir.

Önceliklere sahip sistemleri inceleme, markov zincirlerinin incelenmesine paralellik gösterir. Sistemlere markov zincirlerinin sonuçlarını adapte edebilmek için, ikisi arasındaki karşılıklı ilişkiler aşağıda gösterilmiştir.

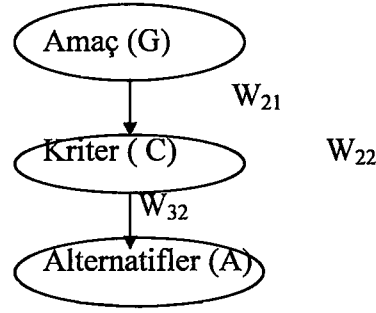
Süpermatrisin kuvvetlerini bilgisayar yardımı ile alarak, önceliklerin limit durumunu tahmin etmek daha kolaydır.

Önceliklere sahip sistemler ile markov zincirleri arasındaki karşılıklı terminoloji

Önceliklere sahip sistemler	↔	Markov zincirleri
Sistem	↔	Sistem
Bileşen (bir veya daha fazla eleman)	↔	Durum
k zamanında etki ya da tesir	↔	k zamanında geçiş
Öncelik	↔	Olasılık
Bir bileşenden etki	↔	Bir duruma geçişler
Etki önceliği (i bileşeninden j bileşenine)	↔	Şartlı geçiş olasılığı
Karma öncelik	↔	Mutlak olasılık

4.4.Süpermatris-Önceliklerin Genel Kompozisyonu

Bir sistem de, birbirine bağlı etkilerde geri beslemeli yaklaşım, bir hiyerarşi fikrinin genellemesi ile birlikte önceliklerin elde edilmesi için kullanılır (Saaty 1996). Bu çatıda, bir sistemin elemanları bir networkün düğümleri şekillenir ve eğer aralarında etkileşim var ise iki düğüm bir ark ile birleştirilir. Genel öncelikleri elde etmek için, her bir elemana ait (local) öncelik özvektörleri, süpermatris olarak bilinen, elemanlar arasındaki etkileşimin bir matrisinin uygun sütunları olarak girilir. Bu matrisi sınırlı kuvvetlere kadar arttırmak, etkileşim içindeki her bir elemanın etkileşim içinde olduğu diğer bir eleman üzerinde gitgide artan (doğrusal olmayan) bir etkisini doğurur.



Şekil 4.5. Birbirine bağlı bir hiyerarşi

Üç seviyeli bir hiyerarşinin matris gösterimi aşağıdaki şekildedir.

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} G & C & A \end{matrix} \\ \begin{matrix} Amaç (G) \\ Kriter (C) \\ Alternatifler (A) \end{matrix} & \begin{pmatrix} O & O & O \\ W_{21} & O & O \\ O & W_{32} & I \end{pmatrix} \end{matrix}$$

Buradaki W_{22} ve W_{32} 'de bir matristir. W_{21} aslında amacın kriter üzerindeki etkisini gösteren bir vektördür ve W_{32} alternatiflerin her biri üzerindeki kriter etkisini göstermektedir. Burada W , bir süpermatris olarak kabul edilir, çünkü onun tüm elemanları birer matristir. Eğer kriterler kendi içinde birbirine bağlı ise, (bağıllık var ise) o zaman W_{22} ile verilen W 'nun (2,2) elemanı sıfır değildir ve aşağıdaki gibi olur.

$$W = \begin{pmatrix} O & O & O \\ W_{21} & W_{22} & O \\ O & O & I \end{pmatrix} \quad (4-1)$$

Bu sistem Şekil 4.5'deki network'ta gösterilmiştir ve buradaki oklar aynı ya da bir başka kümedeki (örnek olarak: alternatifler) elemanlar üzerinde olan bir kümedeki (örnek olarak: kriter) elemanların etkisini temsil eder. Bir özelliğe göre yapılan etki ya da etkileşim primitif bir gösterimdir. Verilen bir süpermatriste tüm karşılaştırmalar, elemanların yaptığı daha fazla etki veya etkileşime göre yapılır. Alternatif olarak, kişi hangi eleman daha fazla etkilendi diye sorabilir. İki küme arasındaki tipik bir bağıllık probleminde, kişi, bir kümedeki elemanları tanımlar ve bu eleman üzerindeki diğer kümede bulunan elemanların

etkisi için ikili karşılaştırmalar yapar. Örnek olarak: eğer bir küme hastalıkları ve diğer küme de belirtiler içeriyorsa, biri bir hastalık ve bir çift belirti seçer ve sorar: bu seçilen çiftten hangi belirti bu hastalık için daha karakteristiktir ve diğeriyle karşılaştırıldığında nasıl daha fazla kuvvetlidir? Kişi tüm ikililerin karşılaştırmalarını yapar. Bu süreç tüm diğer hastalıkların tamamı için ayrı bir matriste tekrarlanır. Benzer olarak, kişi bir belirti alır ve bir çift hastalık seçer ve şu soruya cevap verir: Hangi hastalık muhtemelen daha fazla bu belirtiyi gösterir? Bu matrisler, süpermatrislerin uygun bloklarındaki düzenlenmiş öncelik vektörlerine götürür. AHY'nin bir avantajı da ikili karşılaştırma soruları anket yapanlar tarafından daha kolayca yorumlanır (Saaty, 1998).

Bu anlatılan örneği genelleştirelim. $C_1, C_2, \dots, C_n$ olarak N sınıfa ya da bileşene ayrışabilen bir sistem olsun. C_k bileşenindeki elemanların sayısı n_k olmak üzere $e_{k1}, e_{k2}, \dots, e_{knk}$ olsun. Hiyerarşinin iki komşu seviye arasındaki etkinin daha önce verilen tartışması, burada bileşenlere karşılık gelen elemanlar arasında etki-ölçüm matrisinin kurulmasına imkan sağlar (4-1) matrisinin daha genel şekli etki-ölçüm matrisi aşağıdaki verilecektir. Yine, her bileşen çiftinin etkileştiği kabulü yapılmaktadır. Bu etkileşimin olmadığı durumda matrisin ilgili elemanı sıfırdır.

Süpermatris, sistemler için öncelikler geliştirmede temel bir rol oynamaktadır. Bununla beraber, ilk olarak süpermatrisin kuvvetlerini alarak hiyerarşik kompozisyonun nasıl türetileceği gösterilecektir.

Daha önce açıklandığı gibi, elemanlar bileşenler olarak kümelenemediğinde, sistemdeki bütün elemanların diğer elemanların her birine göre önceliğini ölçmek için ikili karşılaştırma matrisleri kurulmalıdır. Örneğin, endüstrilerin diğer endüstrilerin her birine etkisi ya da katkısı karşılaştırılabilir. Bununla beraber, tutarlılığı sağlamak için bileşen kümeleme yaklaşımı tercih edilir. Çünkü az sayıda elemanın olduğu kümede ikili karşılaştırma kararlarını vermek daha kolaydır. Böylece bir bileşendeki elemanların diğer bir bileşendeki elemanlara göre (bileşenin kendisine göre de olabilir) öncelik özvektörlerinin elde edildiği kabul edilir. Bu karşılaştırmaların hiçbir anlamı yoksa özvektör olarak sıfırlar kullanılır.

Bir sistemin bileşenleri arasındaki etkileşmeye karşılık gelen süpermatris aşağıdaki gibi gösterilir.

$$W = \begin{matrix} & \begin{matrix} C_1 & C_2 & \dots & C_N \end{matrix} \\ \begin{matrix} C_1 \\ C_2 \\ \vdots \\ C_N \end{matrix} & \begin{bmatrix} e_{11}, e_{12}, \dots, e_{1n_1} & e_{21}, e_{22}, \dots, e_{2n_2} & \dots & e_{N1}, e_{N2}, \dots, e_{Nn_N} \\ e_{11} & & & \\ e_{12} & W_{11} & & W_{1N} \\ \vdots & & & \\ e_{13} & & & \\ e_{21} & & W_{22} & \\ e_{22} & W_{21} & & W_{2N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{2n_2} & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e_{N1} & & & \\ e_{N2} & W_{N1} & W_{N2} & W_{NN} \\ \vdots & & & \\ e_{Nn_N} & & & \end{bmatrix} \end{matrix}$$

Burada i, j bloğu

$$W_{ij} = \begin{bmatrix} (j_1) & (j_2) & \dots & (j_{n_j}) \\ W_{i1} & W_{i1} & \dots & W_{i1} \\ (i_1) & (i_2) & \dots & (i_{n_i}) \\ W_{i1} & W_{i1} & \dots & W_{i1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ (i_1) & (i_2) & \dots & (i_{n_i}) \\ W_{i1} & W_{i1} & \dots & W_{i1} \end{bmatrix}$$

ile verilir. Sütunların her biri, i 'nci bileşendeki bütün elemanların j 'nci bileşendeki elemanların her biri üzerine etkisini gösteren bir özvektördür.

W süpermatrisi, bloklarının her biri stokastik olmasına rağmen stokastik değildir. Stokastik olması için bileşenlerinin sisteme olan katkılarının önemine göre ağırlıklandırıldığı kabulünü yapmak gerekir. Bunun nasıl yapıldığı Bölüm 4.6'da verilecek örneklerde

gösterilecektir. Böylece bileşenlerin elde edilen öncelikleri, W 'da bu bileşenlere karşılık gelen elemanları ağırlıklandırmada kullanılır. Bu işlem W 'yı stokastik bir matrise dönüştürür. Bundan sonra W matrisinden söz edildiğinde, bu matrisin ağırlıklandırılmış bir stokastik matris olduğu kabul edilecektir.

Bu kısmı desteklemek için aşağıdaki teoremler verilebilir.

Teorem 4-1: A non-negatif matrisinin stokastik olması için gerek ve yeter şart $(1, 1, \dots, 1)$ vektörünün, $xA=x$ 'in bir çözümü olmasıdır. Burada " 1 ", A 'nın asal (esas) özdeğeridir.

Teorem 4.2: $n \times n$ boyutlu A matrisinin indirgenemez (irreducible) olması için gerek ve yeter şart buna karşılık gelen yönlü graph'ın kuvvetli bağlantılı olmasıdır.

Teorem 4-3: Bağlantılı graphın, kuvvetli bağlantılı olması için gerek ve yeter şart, her arkının, en az bir döngüye ait olmasıdır.

Teorem 4-4: A matrisinin indirgenebilir bir matris (reducible matrix) olması için gerek ve yeter şart $(\lambda_{\max} I - A)$ matrisinin $(n-1)$ 'nci mertebeden asal minörlerinden en azından birinin sıfır olmasıdır.

Teorem 4-5: A, n 'nci mertebeden non-negatif indirgenemez bir matris ise $(I+A)^{n-1} > 0$ 'dır.

Bu şunu ifade eder; eğer graph kuvvetli bağlantılı ise ve her tepeye döngüler eklenmişse elde edilen matris primitiftir, yani herhangi bir tepeye, herhangi bir başka tepeden sabit uzunluklu bir yol ile ulaşılabilir.

Teorem 4-6: Tepe matrisi A olan kuvvetli bağlantılı graphın ($n \geq 2$ tepeli) primitif olması için gerek ve yeter şart bütün basit döngülerin uzunluklarının en büyük ortak böleninin " 1 " olmasıdır.

Teorem 4-7: Primitif (sütun) stokastik A matrisi şu özelliklere sahiptir: $\lim A^k$ 'nin aynı W sütunları (yegane denge olasılık vektörü) vardır, böylece $w=Aw$ denkleminin tek bir

çözümü vardır; ilave olarak herhangi başlangıç olasılık vektörü $w^{(0)}$ ($w_i^{(0)} \geq 0, \sum w_i^{(0)} = 1$) için $A^k \cdot w^{(0)} \rightarrow w$ 'dır.

Bu teorem matris primitif olduğunda öncelikleri hesaplamak için anahtar teoremdir. Sözü edilen matrislere ait genel bilgi EK-3'de verilecektir.



Bir hiyerarşinin süpermatrisi

$$W = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ W_{21} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & W_{32} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & \dots & . & . \\ . & . & . & W_{n-1,n-2} & . & . \\ 0 & 0 & 0 & \dots & W_{n,n-1} & I \end{bmatrix}$$

formundadır.

Bu matrisin kararlı formu (her $k \geq n-1$ için)

$$\begin{bmatrix} 0 & & & 0 & & \dots & \\ 0 & & & 0 & & \dots & \\ . & & & . & & \dots & \\ 0 & & & . & & \dots & \\ . & & & . & & \dots & \\ 0 & & & 0 & & \dots & \\ W_{n,n-1} & W_{n-1,n-2}, \dots, W_{32} & W_{21} & W_{n,n-1} & W_{n-1,n-2}, \dots, W_{32} & \dots & \\ & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & . & & . & . \\ & & & . & & . & . \\ & & & . & & . & . \\ & & & 0 & & 0 & 0 \\ & & & W_{n,n-1} & W_{n-1,n-2} & W_{n,n-1} & I \end{bmatrix}$$

dır.

Son satırdaki her bir katsayı, son bileşenin geri kalan bileşenlerin her birisi üzerine karma öncelik etkisini verir. n 'nci bileşenin birinci bileşene etkisi olarak hiyerarşik kompozisyon prensibinin $(n,1)$ pozisyonunda ortaya çıktığı görülür. n 'nci bileşen hiyerarşiye götürür ve bir markov zincirinde yutucu duruma karşılık gelir. Bu n 'nci bileşen, dağılan veya öncelik

etkileri kaynağı olan elemanların bileşenidir. Yukarıda anlatılanların esası “hiyerarşik kompozisyon prensibi” olarak: n seviyeli bir hiyerarşinin karma vektörü, $k \geq n-1$ olmak üzere W^{k-1} 'in $(n,1)$ pozisyonundaki elemandır, şeklinde özetlenir.

Kısaca döngülerde meydana gelen olaylara bakalım. Bir regular (düzenli) bileşenler kümesinin tekrarlı olarak kuvvetlerini alma, kararlılık eksikliği ortaya koyar. Örneğin, üç bileşenli bir döngü için

$$W = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & W_{23} \\ W_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & W_{12}W_{23} \\ W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{31}W_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^3 = \begin{bmatrix} W_{12}W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & W_{23}W_{31}W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & W_{31}W_{12}W_{23} \end{bmatrix}$$

$$W^{3k} = \begin{bmatrix} (W_{12}W_{23}W_{31})^k & 0 & 0 \\ 0 & (W_{23}W_{31}W_{12})^k & 0 \\ 0 & 0 & (W_{31}W_{12}W_{23})^k \end{bmatrix}$$

$$W^{3k+1} = \begin{bmatrix} 0 & (W_{12}W_{23}W_{31})^k W_{12} & 0 \\ 0 & 0 & (W_{23}W_{31}W_{12})^k W_{23} \\ (W_{31}W_{12}W_{23})^k W_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$W^{3k+2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & (W_{12}W_{23} W_{31})^k W_{12}W_{23} \\ (W_{23}W_{31} W_{12})^k W_{23}W_{31} & 0 & 0 \\ 0 & (W_{31}W_{12} W_{23})^k W_{31}W_{12} & 0 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Stokastik matrislerin çarpımı stokastik olduğundan ve bütün elemanları pozitif olan bir stokastik matrisin kuvvetlerinin limiti aynı sütunlara sahip bir matris olduğundan, bu limit matrisi sağdan herhangi bir stokastik ile çarpmak eski matrisi değişmez (invariant) bırakır. Bir döngünün sonucu, W 'nın farklı ardışık kuvvetleri boyunca limit alınmasındadır. Her bir bileşenin diğer bileşenlerin her biri üzerine etkisi (kendisi üzerine de dahil olmak üzere) aynı ifade ile, yani onun komşu bileşenine göre kendi limit önceliği ile verilir.

Bir döngünün i 'nci bileşeni ile başlayarak komşu bileşenleri $i, i_1, i_2, \dots, i_n, i$ ile indisleyelim. Aşağıdaki ifadeler beklentilerimize uygundur.

Basit bir bileşenler döngüsünde i 'nci bileşenin etki önceliğinin limiti $W_{iii}, x=x$ probleminin özvektör çözümü ile verilir.

Bunu görmek için, az önceki ifadeden, i 'nci bileşenin etkisinin

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} (W_{ii1}, W_{ii2}, \dots, W_{iin})^k &= \lim_{k \rightarrow \infty} W_{ii1}^k \cdot W_{ii2}^k \cdot \dots \cdot W_{iin}^k \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} W_{iii}^k \end{aligned}$$

olarak elde edildiğine dikkat edelim. Buradaki sağ taraftaki stokastik matrisler önemszenemez. Çünkü bunların sonuca etkisi yoktur. Bu limit aynı sütunlara sahip bir stokastik matrisi verir. Böylece limitte, bir döngüdeki bir bileşenin önceliği, onun etki matrisinin en büyük özdeğerine karşılık gelen özvektör ile verilir. Sözü edilen bu değer stokastik bir matris için 1'dir (Saaty, 1998).

4.5. Etki ve Mutlak Öncelikleri

Burada iki öncelik tipi hakkında bilgi verilecektir. Sistemde bir elemanın diğer elemanların herhangi birisi üzerine tesirini (influence) veya etkisini (impact) veren öncelikler etki önceliği olarak bilinmektedir. Yine herhangi bir elemanın hangi elemanları etkilediğine bakmadan onun mutlak önceliği anlatılacaktır.

Genel olarak bu iki tür öncelik tipinin limit değerlerini arayalım. Bu önceliklerin hesabı öncelikleri etkileyen tercihlerde hiçbir değişiklik yoksa, mevcut trendlere götürmektedir. Öncelikleri değiştirme prosesi ile incelemeler yaparak, onların limit trendlerine dikkat ederek bir sistemi arzu edilen sonuçlara doğru yönlendirebiliriz.

Eğer W_{ij} , sistemde i 'nci elemanın j 'nci elemana göre etki önceliği ise, o halde

$$\begin{aligned} W_{ij}^{(1)} &= W_{ij} \\ W_{ij}^{(2)} &= \sum_{m=1}^m W_{im} W_{mj} \\ W_{ij}^{(k+1)} &= \sum_{m=1}^m W_{im} W_{mj}^{(k)} \\ W_{ij}^{(h+k)} &= \sum_{m=1}^m W_{im}^{(h)} W_{mj}^{(k)} \end{aligned}$$

dır. Belli bir elemandan bütün mümkün yollar boyunca etki önceliklerinin toplamı, eleman önceliğini vermektedir. Bu W matrisinin kuvvetlerini aldığımızda elde edilen değerdir. Son ifade, $W^{h+k} = W^h \cdot W^k$, ya eş değerdir.

i 'nci elemanın başlangıç önceliği $W_i^{(0)}$ verildiğinde, $k \neq 0$ uzunluktaki yollarda j 'nci elemanın mutlak önceliği

$$W_j^{(k)} = \sum_i W_i^{(0)} \cdot W_{ij}^{(k)}$$

dır.

Problem $k \rightarrow \infty$ giderken, W^∞ limit etki öncelik (LIP) matrisini ve w^∞ limit mutlak öncelik (LAP) vektörünü bulmaktır. Bir öncelik sistemi için yine k 'nın sonlu değerleri için de

öncelikleri belirleme ile ilgilenilecektir. (Bu, limit durumunda olduğu gibi varlık problemlerini ortaya çıkarmaz.)

Özel olarak ilgilendiğimiz şey, LAP önceliğinin ne zaman $W_i^{(0)}$ başlangıç önceliklerinden bağımsız olduğunu belirlemektir. Böyle bağımsızlığa sistemin ergodikliği (ergodicity) denir.

Aşağıda bir sistemi karakterize etmede kullanılan elemanların bir sınıflandırılması yapılmıştır. LIP ve LAP çözümlerinin varlığı ve yapısı ile ilgili matematiksel tartışma aşağıda verilmektedir.

$k \geq 1$ tamsayısı için $W_k = (w_{ij}^{(k)})$ olmak üzere $w_{ij}^{(k)} > 0$ ise, i elemanından j elemanına ulaşılabilir. Burada W^k , her bir elemanın “ k -ulaşılabilirliğini” verir. Bir sistemin C elemanlarının bir alt kümesi, i elemanı C ’de ve j elemanı C ’de değil iken $W_{ji}^{(k)} = 0$ ise kapalıdır. C ’deki bir elemana C ’de olmayan herhangi bir elemandan ulaşamayacağı görülmektedir. Eğer C alt kümesi, tam olarak kapalı hiçbir elemanlar alt kümesini içermezse C alt kümesi minimaldir. Bir minimal kapalı alt küme oluşturan elemanlar kümesi indirgenemez bir matrise (irreducible matrix) karşılık gelir. Eğer bütün sistem ya da alt sistemin matrisi indirgenemez ise sistemin veya alt sistemin kendisine indirgenemez denir. Eğer sistemin iki ya da daha fazla alt kümesi varsa, sisteme ayrıştırılabilir sistem denir.

Eğer sabit bir j için başlangıç olarak j ’nci elemanla başlarsak ve onun $k \geq 1$ uzunluklu bir yolda kendisi üzerine birinci etkisini $f_j^{(k)}$ ile gösterirsek,

$$f_j^{(1)} = w_{jj}^{(1)}, f_j^{(2)} = w_{jj}^{(2)} - f_j^{(1)} \cdot w_{jj}^{(1)}, \dots, f_j^{(k)} = w_{jj}^{(k)} - f_j^{(1)} \cdot w_{jj}^{(k-1)} - \dots - f_j^{(k-1)} \cdot w_{jj}^{(1)}$$

ve

$$f_j = \sum_{k=1}^{\infty} f_j^{(k)}$$

ifadesi j 'nin kendisi üzerine kümülatif (cumulative) etkisini verir. j 'nin kendisi üzerine ortalama etkisi

$$u_j = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot f_j^{(k)}$$

ile verilir.

Tesir önceliğine uygun olarak şu tanımlar verilebilir.

- (1) $f_j=1$ ise, j 'ye dayanıklı (=enduring) [tekrarlı=recurrent] eleman denir. Böylece bir elemanın bir adımda (bir loop ile), iki adımda (diğer bir elemanı içeren (cycle) döngü ile), diğer iki elemanı içeren üç adımda ve böylece devam ederek kendisi üzerine etki önceliklerinin toplamı "1" ise bu eleman dayanıklıdır.
- (2) $f_j < 1$ ise, j 'ye geçişli (transitory) eleman denir. Eğer $u_j, c, 2c, 3c, \dots$ değerlerine sahip ise ya dayanıklı ya da geçişli olan j elemanına devirliliği c olan devirli (periyodik) eleman denir. Burada c sayısı ve k, c tarafından bölünemeyen olmak üzere $w_{ij}^{(k)}=0$ özelliğine sahip olan 1'den büyük en büyük tamsayıdır. u_j 'nin sonsuz olduğu bir dayanıklı j elemanına kaybolan (fading) [null] eleman denir. Ne devirli ne de kaybolan yani $u_j < \infty$ olan j elemanına destekleyici (ergodik) eleman denir. j elemanı ya geçişli ya da kaybolan bir eleman olmak üzere, her i için $w_{ij}^{(k)} \rightarrow 0$ olur. Eğer bir indirgenemez alt sistemde bir eleman devirliliği c olan devirli bir eleman ise, o alt sistemdeki bütün elemanlar c devirliliğine sahip devirli elemanlardır. Eğer j bir kaybolan eleman ise bu sayının sıfıra eşitliği destekleyici ise, bu sayının pozitif olduğu bilinmektedir. Bir indirgenemez alt sistemin bütün elemanları tamamen geçişli ise sistemin kendisine geçişli, indirgenemez alt sistemin bütün elemanları dayanıklı ise sistemin kendisine dayanıklı denir.

Aşağıdaki ifade bir sistem indirgenebilir ya da indirgenemez olsun olması, daima mevcuttur. İndirgenemez durumda bunun değerleri bilinmektedir ve

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \begin{cases} m-1 \\ \sum_{k=0} w_{ij}^{(k)} \end{cases} = \begin{cases} 0, & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ geçişli ise} \\ 1/u_j, & \text{eğer } i \text{ ve } j \text{ dayanıklı ise} \end{cases}$$

ile gösterilir.

Elemanların bütün sonlu sistemlerinin, en azından bir destekleyici elemanı olmalıdır. Bu destekleyici elemanlar, kapalı indirgenemez elemanlar alt kümesini oluşturur. Sonlu bir sistemin dayanıklı elemanları blok (ya da bileşen) olarak tamamen destekleyici olduklarından, böyle üretilmiş sistemlere destekleyici denir.

Eğer j , devirliliği $c > 1$ olan bir devirli eleman ise

$$w_{ij}^{(k)} = 0$$

dır.

Eğer k , c katlı değil ise ve $m \rightarrow \infty$ iken

$$w_{ij}^{(m)} \rightarrow \frac{c}{u_j}$$

ise $k = m \cdot c$ 'dir. Burada m pozitif ve c , $k = m \cdot c$ eşitliğini sağlayan en büyük tamsayıdır.

Daha önce indirgenebilirlik ve primitifliğin LIP ve LAP çözümlerinin varlığını ispatlamada önemli bir rol oynadığı ifade edilmişti. Şimdi daha sonra verilecek tartışmada kullanılan bu kavramlarla ilgili olarak birkaç temel özelliği verelim.

Eğer nonnegatif indirgenemez matris, tek bir asal özdeğere sahip ise primitif'dir. Eğer asal özdeğer olarak aynı modüle sahip bir başka özdeğeri varsa matrise imprimitif denir.

Eğer asal özdeğer (1 'e eşit) 1 'den büyük katlılığa sahip ise, fakat asal özdeğer olarak aynı modüle sahip başka özdeğerler yoksa, matrise tam (düzenli) matris denir.

Primitif bir matris daima regulardır ve böylece tamdır, fakat tersi doğru değildir. Yani özdeğerin katlılığı, matrisin mertebesine eşit olarak 1 olan birim matristir. Bir matrisin tam

olması için gerek ve yeter şart normal formunda izole edilmiş bloklarının primitif olmasıdır. Düzenli bir matris için izole edilmiş blokların sayısı 1'dir.

W'nin bütün elemanları pozitif ise, bir primitif matrisin elde edildiğine, stokastik primitif matrislerin üzerine teoremin uygulandığına, hem LIP hem de LAP'ın mevcudiyetine dikkat edelim. LIP ve LAP'lar aynıdır ve $Ww=w$ özdeğer probleminin çözümü ile elde edilir.

Aslında w , $\lim_{k \rightarrow \infty} W^k$ 'nin herhangi bir sütunudur.

Aynı sonuç, W bir primitif matris ise doğrudur.

Genelde W nonnegatif matrisinde bazı sıfırlar mevcut olabilir. Bu durumda matris ya indirgenebilir ya da indirgenemez bir matristir. Eğer indirgenemez ise ya primitiftir ya da imprimitiftir. Sonraki durumda yani matris imprimitif ise matrisin modülleri 1'e eşit olan s sayıda imprimitif indeksi denilen özdeğeri vardır ve s , 1'e eşit değildir. Burada $w, w^2, \dots, w^{s-1}$ tümünün tam olmadığını ve bu matrislerin katlarının periyodik tekrara yöneldiğini göstermek yeterlidir. Sistem, devirliliği s olan devirli bir sistemdir.

Sistem, karşılık gelen W matrisinin primitif, imprimitif, indirgenemez, indirgenebilir olup olmadığına bağlı olarak devirli olmayan, devirli, indirgenemez, indirgenebilir bir sistemdir. W , nonnegatif ve indirgenebilir ise normal forma indirgenir. Eğer izole edilmiş bloklar primitif iseler, bunların temel olmayan bileşenlere karşılık geldiği söylenir. Sisteme, tanım gereği, tamdır denir ve LIP, LAP'lar mevcuttur.

Sütun stokastik matrisi indirgenebilir olduğunda onun temel bileşenleri sistemi türetir, çünkü bunlar bir markov zincirinin "kuyular"ına veya geçiş-olasılık-yutucu durumlarına zıt olarak "kaynaklar" veya etki-öncelik-dağılım bileşenleridir. Herhangi bir diyagramda, looplar hariç, oklar böyle bileşenlerden çıkar ve böyle bileşenlerde son bulmazlar.

LIP olarak çözüm

$$W^\infty \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} W^k = \frac{(I-W)^{-1} \psi(1)}{\psi'(1)}$$

ile verilir. Burada $\psi(\lambda)$, W 'nin minimum polinomu, $\psi'(n)$, $\psi(\lambda)$ 'nın λ 'ya göre birinci türevidir. LAP çözümü, eğer W proper ise

$$w^\infty = W^\infty \cdot w^{(0)}$$

olarak, eğer W düzenli ise

$$W \cdot w^\infty = w^\infty$$

'un özvektör çözümü olarak elde edilir.

W^∞ 'un temel bileşenlere karşılık gelen matrislerinin pozitif ve onların temelden temel olmayan bileşenlere öncelik etkilerinin de yine pozitif olduğu gösterilebilir. Bunlar normal formun $(I-Q)^{-1} \cdot (R_1, R_2, \dots, R_k)^T$ çarpımı ile verilir. Sadece temel olmayandan temel olmayana veya temel olmayandan temel bileşenlere etkiler sıfırdır.

İzole edilmiş blokların tümü primitif değil ise, her birinin bir imprimitiflik indeksi vardır. Bunların en küçük ortak katını sistemin c devirliliği olarak alalım. W 'nin kuvvetlerini alarak, LIP

$$\begin{aligned} \tilde{W} &= \frac{1}{c} (I + W + \dots + W^{c-1}) \cdot (W^c)^\infty \\ &= \frac{1}{c} (I - W^c) \cdot (I - W)^{-1} \cdot (W^c)^\infty \end{aligned}$$

ile ve LAP

$$w = \tilde{W} \cdot w^{(0)}$$

~

ile bulunur. Hem W hem w 'ye sırası ile ortalama LIP ve ortalama LAP denir. Eğer tek bir izole edilmiş blok varsa, ortalama LAP'lar başlangıç önceliklerinden bağımsızdır ve

$$W \cdot w = w$$

nın çözümü ile tek bir şekilde belirlenir.

Bu indirgenemez imprimitif bir sistem için kesin bir durumdur.

4.6. Örnekler

Aşağıda iki örnek iki amaçla verilmiştir. Birinci amaç, süpermatrisin nasıl çalıştığını göstermek, ikincisi ise sosyal bilimlere metodun nasıl uygulanabileceğini göstermektir. Şüphesiz kararlara ait soruları oluşturmak, ilgili faktörleri vermek ve karşılaştırılacak kavramlarda karmaşıklık ya da üst üste çakışma (örtüşme) olmadığından emin olmak için sahanın uzmanları tarafından iyi bir inceleme yapılmalıdır. Görüleceği gibi, W 'nın artan kuvvetlerinin yorumu pratik olarak önemlidir.

Her iki durumda da problem, sistemi temsil eden bir diyagram ve onun bağlantıları ile birlikte çok öz olarak belirlenir. Birinci örnekte bileşenler için 1, elemanlar için 68 tane ikinci örnekte ise bileşenler için 4, elemanlar için 33 tane olan ikili karşılaştırma matrisleri hazırlanmış ancak burada son 4 tanesi verilmiştir.

Süpermatris iki aşamada oluşur. İlk olarak özvektör blokları doldurulur. Sonra bileşenlerin öncelikleri bulunarak ve bunların ağırlıkları matriste kullanılarak, nihai sütun stokastik süpermatrisi elde edilir. Burada sütunların toplamının kesinlikle 1 olduğunu önemle belirtelim, aksi halde sonsuza ıraksama ya da sıfıra yakınsama olabilir.

Bileşenlerin nasıl ağırlıklandırılacağı önemli bir konudur. Genel olarak süpermatriste bir bileşene karşılık gelen bir sütundaki her bir blok problemde sütun bileşeni üzerine bir etki yapan (bloklar sütununda sıfırdan farklı blok elemanları ile) bu bileşenleri içeren ikili karşılaştırma matrisinden elde edilen ayrı ayrı özvektör katsayısı ile ağırlıklandırılır. Diyagramda bu bileşenlerin kendilerinden verilen sütun bileşenine doğru yönelmiş okları vardır.

Her iki örnekte de W 'nın büyük kuvvetlere yükseltilmesi ile LIP çözümüne bir yaklaşım yapılmıştır. Saaty, öğrencileriyle yaptığı bu çalışmalarda öğrencilerinin bu bilgisayar çağında matrisi kuvvetlerine yükseltmeyi, bölüm 4-5'de verilen teorideki W^∞ formüllerini kullanmaya etkilerini ifade etmiştir.

Birinci örnekte, ağırlıklandırılmamış süpermatris verilmiştir. Bu süpermatris, sistemin bileşenlerinin tam bir graphına karşılık gelir. Böylece bu süpermatris pozitif ve primitiftir. LIP olarak, W^{∞} 'un bütün sütunları aynıdır ve LAP vektörü bu sütunların herhangi birisidir. LAP'a yaklaşabilmek için W^{100} yeterlidir. Bu çözüm vektörü, faktörlerin ve bileşenlerin başlangıçta tanımlanmasından sonra verilecektir.

İkinci çelik endüstrisi örneğinde, süpermatris blokları ağırlıklandırma yapılmadan önce verilmiştir. Bunu, bileşenleri ikili karşılaştırma matrisleri olan ve sonra her bir bloğun ağırlıklandırılması ile elde edilen W süpermatrisi izlemektedir. W^{∞} 'a bir yaklaşım olarak W^{89} verilmiştir.

Saaty, terörizm konusunda J.P. Benett ile yaptığı çalışmasında, tam olarak kurulmuş bir hiyerarşinin sonuçlarının feedback'i olan bir sisteminkine çok yakın olabileceğini göstermiştir.

4.6.1. Çocuk yetiştirme örneği

Bir çocuk daha önceki yıllarda çok sayıda kuvvetlerin etkisi altındadır. Bu etkiler için öncelikler belirlenir. Bu kuvvetlerin birbirleriyle etkileşmesi bir feedback olduğundan problem bir network ile gösterilebilir.

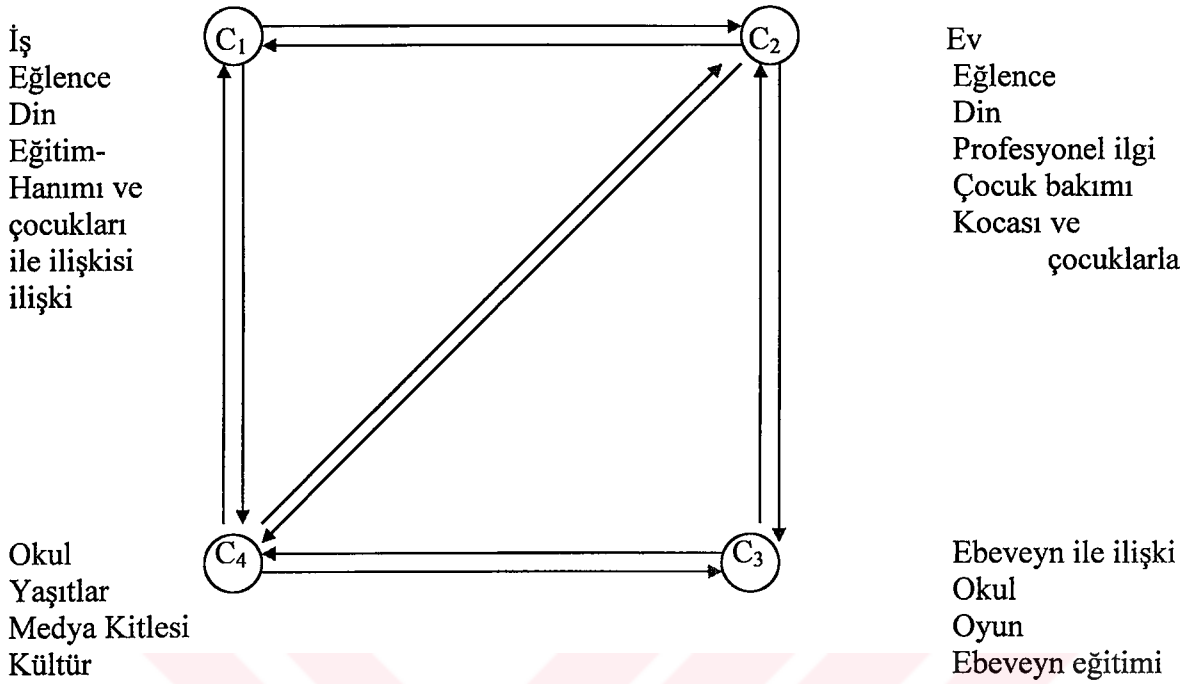
Bu etki kaynaklarının ana grupları ve bunlarla ilgili karakteristikler Çizelge 4.6.'da verilmiştir.

Çizelge 4.6 Çocuk yetiştirme örneğine ait bileşen ve faktörler

	Bileşenler	Faktörler	Öncelikler(LAP yaklaşımı ile)
c ₁	Baba (Fa)	W İş	0,024
		Rf Eğlence	0,022
		Ref Din	0,019
		Ed Eğitim	0,044
		RWC Eşi ve çocukları ile ilişki	0,020
c ₂	Anne (Mot)	H Ev	0,024
		Rm Eğlence	0,026
		Rem Din	0,027
		PI Profesyonel ilgi	0,025
		TC Çocuk bakımı	0,028
		RHC Koca ve çocukları ile ilişki	0,021
c ₃	Çocuk (ch)	Rp Ebeveyn ile ilişki	0,013
		S Okul	0,020
		PL Oyun	0,012
		PE Ebeveyn eğitimi	0,026
c ₄	Dış Çevre (OT)	So Okul	0,120
		PR Yaşlılar	0,074
		ME Medya kitlesi	0,090
		C Kültür	0,360

Çizelge 4.7 Çocuk yetiştirme örneği için ağırlıklandırılmamış süpermatris

	C ¹			C ²			C ³			C ⁴										
	W	R	RE	ED	RWC	N	R	RE	P1	TC	RHC	RPF	S	PL	PE	SO	PR	ME	C	
C ¹	W	0,222	0,209	0,212	0,208	0,257	0,224	0,224	0,150	0,228	0,198	0,213	0,198	0,170	0,123	0,372	0,246	0,149	0,157	0,143
	R	0,095	0,125	0,140	0,170	0,220	0,151	0,224	0,150	0,170	0,232	0,111	0,111	0,144	0,324	0,148	0,150	0,186	0,142	0,178
	RE	0,100	0,145	0,147	0,100	0,110	0,172	0,149	0,344	0,172	0,174	0,122	0,110	0,127	0,132	0,089	0,126	0,130	0,142	0,161
	ED	0,462	0,396	0,374	0,382	0,194	0,229	0,254	0,161	0,260	0,198	0,245	0,260	0,401	0,303	0,297	0,353	0,375	0,423	0,357
	RWC	0,121	0,125	0,127	0,140	0,219	0,224	0,149	0,105	0,170	0,198	0,309	0,314	0,158	0,118	0,094	0,125	0,160	0,136	0,161
C ²	H	0,216	0,185	0,144	0,142	0,145	0,195	0,195	0,220	0,168	0,283	0,200	0,257	0,249	0,148	0,116	0,203	0,131	0,164	0,110
	R	0,105	0,190	0,144	0,162	0,111	0,130	0,137	0,122	0,102	0,122	0,113	0,115	0,124	0,174	0,219	0,132	0,207	0,213	0,198
	RE	0,122	0,148	0,260	0,129	0,127	0,155	0,088	0,122	0,113	0,103	0,113	0,103	0,124	0,111	0,109	0,129	0,145	0,147	0,282
	P1	0,278	0,170	0,144	0,283	0,163	0,135	0,143	0,189	0,178	0,140	0,161	0,139	0,142	0,156	0,268	0,210	0,168	0,147	0,124
	TC	0,140	0,146	0,143	0,142	0,226	0,215	0,239	0,192	0,246	0,221	0,253	0,244	0,249	0,300	0,178	0,165	0,188	0,164	0,176
C ³	RHC	0,139	0,165	0,165	0,142	0,225	0,170	0,198	0,155	0,193	0,131	0,160	0,142	0,112	0,111	0,110	0,161	0,162	0,165	0,110
	RP	0,132	0,141	0,250	0,087	0,204	0,278	0,167	0,250	0,183	0,215	0,333	0,236	0,140	0,143	0,166	0,177	0,167	0,147	0,160
	S	0,151	0,140	0,250	0,246	0,246	0,163	0,167	0,250	0,282	0,209	0,167	0,200	0,103	0,270	0,410	0,195	0,333	0,390	0,354
	PL	0,132	0,263	0,250	0,133	0,204	0,163	0,333	0,250	0,164	0,198	0,167	0,095	0,117	0,162	0,103	0,195	0,167	0,159	0,131
	PE	0,585	0,456	0,250	0,534	0,346	0,396	0,333	0,250	0,371	0,346	0,333	0,469	0,340	0,425	0,321	0,433	0,333	0,304	0,355
C ⁴	SO	0,290	0,135	0,135	0,209	0,186	0,220	0,165	0,140	0,343	0,162	0,200	0,186	0,225	0,140	0,262	0,341	0,220	0,177	0,161
	PR	1,108	0,129	0,129	0,095	0,186	0,121	0,200	0,131	0,150	0,162	0,200	0,156	0,124	0,263	0,140	0,109	0,121	0,114	0,080
	ME	0,101	0,129	0,129	0,103	0,156	0,121	0,140	0,140	0,110	0,151	0,200	0,166	0,135	0,140	0,140	0,118	0,121	0,188	0,143
	C	0,501	0,607	0,607	0,593	0,492	0,538	0,495	0,589	0,397	0,525	0,400	0,492	0,516	0,457	0,458	0,532	0,538	0,521	0,616



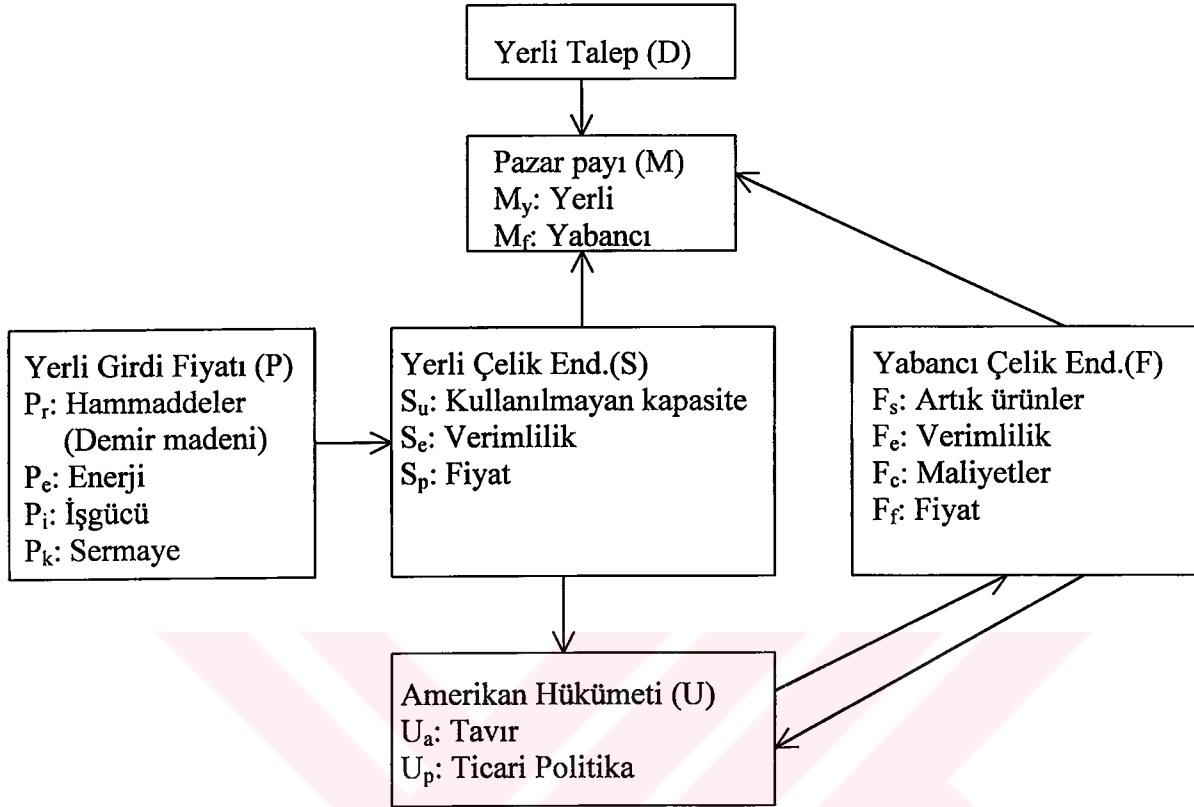
Şekil 4.6 Çocuk yetiştirme örneğine ait bileşenler ve birbirleri ile ilişkileri

İkili karşılaştırma matrisleri için kararlar, özellikle bu konuyla ilgili bir grup öğrenciden elde edilmiştir. Burada dikkate değer şey, bu öğrencilerin deniz aşırı ülkelerden olması ve kararlarının, bir grup Amerikalının verdiği kararlardan farklı olabileceğidir.

“Dış Çevre” bileşeninde “kültür” ve “okul” gibi faktörlerin baskın olduğu görülür. Bunun dışında, sonuçların yorumu üzerinde durulmayacaktır. Bu etkileşimin networku Şekil 4.6’da verilmiştir.

4.6.2. Çelik endüstrisi örneği

Bu örnekte çelik ticaret sisteminin bileşenleri ve bileşenleri etkileyen faktörler göz önüne alınmaktadır. Bu faktör ve bileşenler Şekil 4.7’de gösterilmiştir. Mevcut durumdan önceliklerdeki değişiklikleri araştırılabilir.



Şekil 4.7 Çelik endüstrisi problemindeki bileşen ve faktörler

Buradaki;

- Verimlilik üretim performansı ile ölçülür ve modern teknoloji ile yakından ilgilidir.
- Artık üretim, Japonya kendi tükeminden daha fazla miktarlarda çelik üretimi yapmış ve böylece çeliği daha ucuza satabilir.
- Kullanılmayan kapasite, azalan talebin sonucudur. Kullanılan işgücünü korumak ve rekabeti bozmak için ürün, maliyet fiyatından daha ucuza satılabilir.
- Hükümet, çelik fiyatlarının artmasıyla ortaya çıkan enflasyona karşı tavır takınır.
- Hükümetin ticari politikaları, yerli endüstriyi korumada isteksizlik ifade eder.
- Sermaye fiyatı; çelik endüstrisine yabancı ülkelerde düşük faiz oranı ve Amerika'da yüksek faiz oranı, diğer maliyetlerde indirekt artışa sebep olur.

Ağırlıklandırılmamış süpermatris Çizelge 4.8'de verilmiştir. Süpermatrisi ağırlıklandırmak için yani onu stokastik yapmak için, bileşenler, her bir bloklar sütunu üzerine etkilerine göre ağırlıklandırılır. Şöyle ki, bir sütun bloğunda sıfırdan farklı elemanlara sahip satır

bileşenleri, o sütundaki bileşen üzerine etkilerine göre karşılaştırılırlar. Sonra, her bir blok o satırdaki bileşenlere karşılık gelen özvektör katsayısı ile ağırlıklandırılır. Bu proses aşağıda verilen dört ikili karşılaştırma matrisini verir.

M Sütun bloğu için ikili karşılaştırma matrisi:

	M	S	F	D	Özvektör
M	1	0,0125	0,167	0,333	0,047
S	8	1	3	6	0,568
F	6	0,333	1	5	0,293
D	3	0,167	0,200	1	0,092

S Sütun bloğu için ikili karşılaştırmalar matrisi

	S	P	Özvektör
S	1	0,333	0,250
P	3	1	0,750

U Sütun bloğu için ikili karşılaştırma matrisi

	S	U	F	Özvektör
S	1	0,143	0,333	0,081
U	7	1	5	0,731
F	3	0,20	1	0,188

F Sütun bloğu için ikili karşılaştırma matrisi

	U	F	Özvektör
U	1	4	0,8
F	0,125	1	0,2

Yukarıdaki matrislerden elde edilen özvektörler ile Çizelge 4.8'deki süpermatris ağırlıklandırılır, buradan Çizelge 4.9'da gösterilen sütun stokastik matris elde edilir.

Tablo 4.9 Çelik endüstrisi örneği için ağırlıklandırılmış süpermatris

M	S	U	F	P	D
M	0,03	0,03	0,00	0,00	0,00
	0,03	0,03	0,00	0,00	0,00
	0,05	0,05	0,06	0,00	0,00
S	0,05	0,05	0,01	0,00	0,00
	0,47	0,47	0,03	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,66	0,08	0,00
U	0,00	0,00	0,07	0,72	0,00
	0,08	0,08	0,04	0,05	0,00
	0,02	0,02	0,10	0,11	0,00
F	0,02	0,02	0,01	0,04	0,00
	0,17	0,17	0,04	0,02	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
P	0,00	0,00	0,00	0,12	0,04
	0,00	0,00	0,00	0,06	0,16
	0,00	0,00	0,00	0,26	0,23
D	0,00	0,00	0,00	0,56	0,57
D	0,09	0,09	0,00	0,00	1,00

Çizelge 4.10 Süpermatrisin 89'ncu kuveti

M	S	U	F	P	D
M	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
S	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
U	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
F	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
	0,05	0,05	0,06	0,06	0,06
P	0,14	0,13	0,16	0,16	0,16
	0,34	0,34	0,41	0,41	0,41
D	0,43	0,43	0,51	0,51	0,51
D	0,10	0,09	0,00	0,00	0,00

Örneğin Çizelge 4.9'daki M sütununun sütun stokastik yapılması şu şekildedir: Çizelge 4.8'deki M sütunu bloğunda sıfırdan farklı bileşenler yani M'yi etkileyen bileşenler, M, S, F ve D'dir. İkili karşılaştırma matrisinin hazırlanmasında sorulacak soru şudur: "Pazar payını (M'yi) etkileyen bileşenlerin, M'yi etkileme açısından birbirlerine göre önemleri nedir?" Matristen elde edilen özvektör görüldüğü gibi (0,047, 0,568, 0,293,0,092)'dir. Bu vektörün elemanları yani öncelikler Çizelge 4.8'deki M sütununda sıfırdan farklı bileşenlere karşılık gelen katsayı olarak alınır, yani Çizelge 4.8'deki M sütununda

M bileşeni	0,047
S bileşeni	0,568
F bileşeni	0,293
D bileşeni	0,092

ağırlığı ile ağırlıklandırılır.

Çizelge 4.9'daki ağırlıklandırılmış sütun-stokastik matrisinin 89.kuvveti ise Çizelge 4.10'da verilmiştir.

Matrislerin kuvvetlerini artırmak, elemanların birbirleri üzerine uzun dönem relatif tesirlerini verir. Buradan Çizelgelara baktığımızda ilk söyleyebileceğimiz şey, fiyat ve talebin çelik endüstrisini işleten faktörler olduğudur. Görülür ki, matrisi kuvvetlerine yükselttikçe, Amerikan pazar payına (M)'ye sermaye fiyatı (Pk)'nın etkisi 0'dan 0,43'e çıkmıştır. Böylece çeliğin gelecekteki genişlemesine veya hatta yaşamasına tehditi işaret ederek, yerli çelik sanayiine yatırım yapmayı pahalı kılar. Sistemdeki bütün geçişli elemanlarda olduğu gibi, kullanılmamış kapasitesinin önemi, 0'a düşer.

Bir diğer belirgin sonuç ise, çelik endüstrisindeki talebin etkisinin, uzun vadede değişmeyeceğidir. Sermaye fiyatlarının model üzerinde en büyük genel (overall) etkisi vardır. Tahmin edildiği gibi, sermaye fiyatının önceliği, diğer girdi fiyatlarının öncelikleriyle karşılaştırıldığında artış göstermiştir. Çünkü sermaye maliyetinin diğer girdi fiyatları üzerinde büyük bir etkisi vardır. Gerçekte bu, uzun vadede olacak şeydir, fakat

kısa vadede diğer elemanların, relatif öncelikler üzerinde daha büyük bir etkisi vardır (Saaty, 1988).



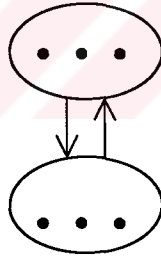
5. GERİ BESLEMELİ SİSTEMLER VE SÜPERMATRİS TEKNİĞİ İLE İLGİLİ ÜÇ ÖRNEK

ÖRNEK 1: Bir Öğretmenin Performansını Değerlendirme

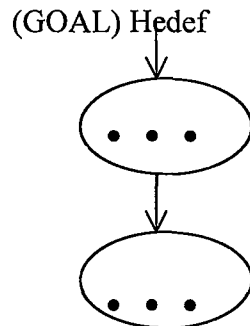
Bu örnek, her bir bileşenin elemanlarının bağımsız olduğu düşünülen iki bileşen arasındaki bağıllığın bir örneğidir. Bu durum iki bileşen arasındaki bir feedback döngüsü (loop=bağı) ile Şekil 5.1’de gösterilmektedir. Araştırma, öğretim ve toplumsal ilişkiler kriterlerine göre değerlendirilecek üç profesör adayımız olduğunu farz edelim.

Her bir aday değerlendirilirken birbirinden bağımsız olarak değerlendirilecektir.

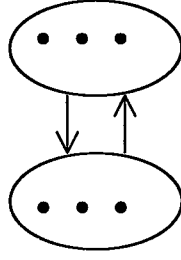
Adayların karşılaştırılmasında ilk önce şu soruya cevap verilmelidir: “Bir kriter verildiğinde, hangi aday en fazla tercih edilir ve ne kadar tercih edilir?”. Bu süreçte her bir kriter için ayrı ayrı olmak üzere üç özvektör elde edilir. Bir de her bir alternatife göre kriter karşılaştırıldığında, bu karşılaştırmada şu soru sorulabilir: “Bir alternatif (aday) verildiğinde, hangi kriterde daha kuvvetlidir ve bu kuvvetlilik nasıldır?” Bu süreçte yine



Şekil 5.1 Dış bağıllık ile devir (circuit=şebeke)



Şekil 5.2 İç bağıllık olan feedback olmayan bir hiyerarşi



Şekil 5.3 İç ve dış bağıllık olan şebeke (circuit)

Her bir alternatif için üç özvektör elde edilir. O zaman ikili karşılaştırma matrislerini kullanarak aşağıdaki süpermatris oluşturulur.

$$A = \begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & & & & 0,30 & 0,50 & 0,40 \\ C_2 & & 0 & & 0,40 & 0,10 & 0,20 \\ C_3 & & & & 0,30 & 0,40 & 0,40 \\ A_1 & 0,25 & 0,10 & 0,40 & & & \\ A_2 & 0,25 & 0,50 & 0,30 & & & \\ A_3 & 0,30 & 0,40 & 0,30 & & 0 & \end{bmatrix}$$

$\lim_{k \rightarrow \infty} A^{2k+1}$ ile son çözüm şu şekilde belirlenmiştir:

$$A = \begin{bmatrix} & C_1 & C_2 & C_3 & A_1 & A_2 & A_3 \\ C_1 & & & & 0,405 & 0,405 & 0,405 \\ C_2 & & 0 & & 0,222 & 0,222 & 0,222 \\ C_3 & & & & 0,373 & 0,373 & 0,373 \\ A_1 & 0,273 & 0,273 & 0,273 & & & \\ A_2 & 0,324 & 0,324 & 0,324 & & & \\ A_3 & 0,403 & 0,403 & 0,403 & & 0 & \end{bmatrix}$$

Burada matrisin üst yarısında her bir adaya göre kriterlerin önceliklerini vermektedir ve matrisin alt yarısındaki ilk üç sütun kriterlere göre her bir adayın önceliklerini vermektedir.

ÖRNEK 2- Bir Motorsiklet Dizaynı

Bu örnek yazar M. Takizawa tarafından onun Yamaha Motor Şirketindeki motosiklet dizaynı tecrübelerine dayanılarak geliştirilmiştir. Bu örnek bir seviyenin bileşenlerinin birbirine bağıllığını anlatır. Bu düşünce Şekil 5.4'te örneklendirilmiştir.

Amaç, kriteri basandır. Kriter de alternatifleri basandır. Amaç, kriter ve alternatifler aşağıdaki şekilde belirlenmiştir.

(1) Amaç: Bir motosiklet parçasının fonksiyonel üstünlüğünün değerlendirilmesi.

(2) Kriter: Dört temel fonksiyon; durma, dönme, gitme, hızlandırma.

Bu fonksiyonların tanımlanması:

(Stop) Durma	:	Tekerleklerin dönüşünü durdurma.
(Run) Gitme	:	Tekerleklerin dönüşünün devam ettirilmesi ve hızın kontrolü.
(Turn) Dönme	:	Yolu izlemek amacıyla motosikletin döndürülmesi.
(Accelerate)		
Hızlandırma:		Hız değişim oranının kontrolü.

(3) Alternatifler: Altı ana parça: frenler (Brokes), dümen (Steering), ana parça (gövde=Bady Frame), motor (Engine), tekerlekler (Whells), süspansiyen (suspension).

Bu dört fonksiyon arasında bağıllık vardır. Her bir fonksiyona (kriter) göre alternatifler arasında da bağıllık vardır. Ama kriterler alternatiflere bağlı değildir.

Bu problemin çözüm aşamaları aşağıdaki şekildedir.

1.Adım: Kriteri karşılaştırmada kişi şu soruyu cevaplandırmalıdır: “Motosiklette hangi fonksiyona daha fazla önem verilmelidir ve ne kadar daha fazla önem verilmelidir?” Amaca göre tüm parçaları karşılaştırırsak, aralarında bağıllık olmadığını farz ederek, kriterler için aşağıdaki özvektörü elde ederiz:

$$= \begin{pmatrix} \text{(durma, dönme, gitme, hızlanma)} \\ (0,35, 0,30, 0,20, 0,15) \end{pmatrix}$$

2.Adım: Yine, alternatifler arasında bağıllık olmadığını farz ederek, her bir kritere göre karşılaştırılır ve her bir kritere uygun sütun özvektörler oluşturulur. Bu değerler Çizelge 5.1’de gösterilmiştir.

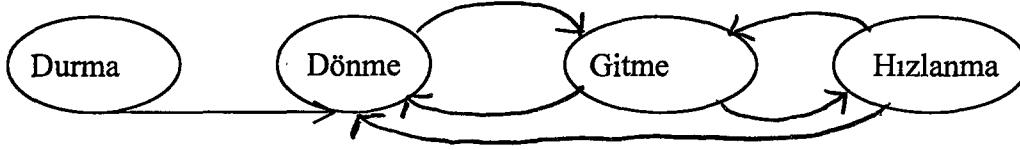
Çizelge 5.1 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin bulunan özvektörleri

Parçalar	Fonksiyonlar		Gitme (R)	Hızlandırma (A)
	Durma (S)	Dönme (T)		
Fren (BR)	0,40	0,10	0,00	0,00
Dümen (STR)	0,05	0,25	0,05	0,05
Gövde (BF)	0,20	0,20	0,20	0,20
Motor (EG)	0,15	0,15	0,35	0,40
Tekerlekler (WH)	0,15	0,20	0,20	0,30
Süspansiyon ve Tampon (SUS)	0,15	0,10	0,20	0,05
	W_{21}	W_{22}	W_{23}	W_{24}

3.Adım: Bir sonraki fonksiyonlar arasındaki bağımsızlığı analiz edeceğiz. Motosiklet parçalarını dizayn ettiğimizde, sadece bir tek fonksiyon üzerinde konstantre olamayız ve diğer fonksiyonları da o fonksiyonla beraber düşünmeliyiz. Ayrıca ikili karşılaştırmaları kullanarak fonksiyonların her birinin tüm fonksiyonlar üzerindeki etkilerini analiz etmeye ihtiyaç vardır. Elde edilen dört özvektör verisi Çizelge 5.2’de gösterilmiştir.

Çizelge 5.2 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonların karşılaştırılması

Kriter Fonksiyonlar	Durma (S)	Dönme (T)	Gitme (R)	Hızlanma (A)
Durma (S)	1,0	0,3	0,0	0,0
Dönme (T)	0,0	0,4	0,1	0,0
Gitme (R)	0,0	0,1	0,6	0,2
Hızlanma (A)	0,0	0,2	0,3	0,8



Şekil 5.4 Fonksiyonlar arasındaki ilişki

Yukarıdaki şekilde okun başı etkin olan oku işaret etmektedir.

Karşılaştırma için bir örnek soru da şöyle olabilir: “Bir motosiklet dizaynında, verilen fonksiyon “durma” fonksiyonu olsun ve hangi fonksiyon “durma”ya daha fazla neden olur ve ne kadar daha fazla olur?” Benzer olarak, aynı tür soru diğer üç fonksiyon içinde tekrar edilir.

Burada bir sıfır etki olmadığını ya da bağıllık olmadığını işaret eder. Fonksiyonlar arasındaki ilişki Şekil 5.4’teki gibi şematik olarak gösterilebilir.

Çizelge 5.2 ve Şekil 5.4’ü incelersek, hareket eden bir motosikletin durdurulması, ayağı gaz pedalından çekip sonra fren yaparak meydana gelen durma fonksiyonuna gereksinim duyar. Dönmek için, bir insan ilk olarak yavaşlayabilir ve dümeni kullanarak dönebilir ama motoru çalışır halde tutarak ve sonra kişi önceki hızına dönmek için hızlanır. Bir motosikleti sorunsuz olarak kullanmak için “dönme” fonksiyonuna ihtiyaç duyulur. Ayrıca hem engellerden sakınmak için hem de gitme ve hızlanma için gereklidir. Bir motosikleti hızlandırmak için, ilk önce motosiklet çalışıyor olmalı ve hızlanma gaz pedalına basılarak sağlanmalıdır.

4.Adım: Daha sonra her bir kritere göre alternatifler arasındaki bağıllığı inceleriz. Burada insanın cevaplama gereken sorunun bir örneği şudur: Fonksiyonların tatminine uygun olarak “fren” ile “durma”, hangi parça durmak için frenlerin hareketine daha fazla katkıda bulunur ve daha fazla ne kadar katkıda bulunur?

Örneğin, gövde onun davranışını, hız altında diğer parçaların hepsinden daha fazla etkiler gibi görünür. Frenler kusursuz olabilir ama hala gövdenin ağırlığı hareketin devamına meyilli de olabilir. Bu değerlendirmenin yapımında büyük ölçüde dikkat edildi.

5.Adım: Şimdi, birinci adımdaki sonuçlarla ve üçüncü adımdan aşağıdaki gibi sentez yapılarak, fonksiyonların (kriter) birbirine bağlı olma öncelikleri elde edilir.

$$W_c = W_3 \times W_1$$

$$\begin{bmatrix} \text{Durma} & \text{Dönme} & \text{Gitme} & \text{Hızlanma} \\ (S) & (T) & (R) & (A) \\ 1,0 & 0,3 & 0,0 & 0,0 \\ 0,0 & 0,4 & 0,1 & 0,0 \\ 0,0 & 0,1 & 0,6 & 0,2 \\ 0,0 & 0,2 & 0,3 & 0,8 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0,35 \\ 0,30 \\ 0,20 \\ 0,15 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,44 \\ 0,14 \\ 0,18 \\ 0,24 \end{bmatrix}$$

(Durma, Dönme, Gitme, Hızlanma) = (0.44, 0.14, 0.18, 0.24)

elde edilir.

6.Adım: Dört fonksiyonun her birine uygun olarak alternatiflerin W_A öncelikleri, ikinci ve dördüncü adımdan sonuçların sentezinin yapılması ile bulunur.

Çizelge 5.3 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin karşılaştırmaları W_{41}

Fonksiyonlar	Durma (S)					
Parçalar	BR	STR	BF	EG	WH	SUS
Fren (BR)	0,40	0,00	0,00	0,00	0,20	0,00
Dümen (STR)	0,05	0,70	0,10	0,00	0,05	0,10
Gövde (BF)	0,10	0,10	0,70	0,05	0,00	0,10
Motor (EG)	0,10	0,00	0,00	0,90	0,00	0,00
Tekerlekler (WH)	0,30	0,10	0,10	0,05	0,70	0,10
Süspansiyon ve Tampon (SUS)	0,05	0,10	0,10	0,00	0,05	0,70

Çizelge 5.4 Motorsiklet dizaynına ait dönme fonksiyonlarına göre alternatiflerin W_{42} karşılaştırmaları

Fonksiyon	Dönme					
Parçalar	BR	STR	BF	EG	WH	SUS
Fren (BR)	0,80	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00
Dümen (STR)	0,00	0,70	0,00	0,00	0,10	0,10
Gövde (BF)	0,00	0,10	0,90	0,00	0,00	0,20
Motor (EG)	0,00	0,00	0,00	1,00	0,00	0,00
Tekerlekler (WH)	0,20	0,10	0,00	0,00	0,85	0,10
Süspansiyon ve Tampon (SUS)	0,00	0,10	0,10	0,00	0,05	0,60

Buradaki W_{41} ve W_{21} Çizelgelerini kullanarak

$$W_{A1} = W_{41} \times W_{21} = \begin{bmatrix} 0,190 \\ 0,088 \\ 0,198 \\ 0,175 \\ 0,263 \\ 0,088 \end{bmatrix}$$

$$W_{A2} = W_{42} \times W_{22} = \begin{bmatrix} 0,080 \\ 0,205 \\ 0,225 \\ 0,150 \\ 0,225 \\ 0,115 \end{bmatrix}$$

Çizelge 5.5 Motorsiklet dizaynına ait gitme fonksiyonlarına göre alternatiflerin karşılaştırmaları
W₄₃

Fonksiyon	Gitme					
Parçalar	BR	STR	BF	EG	WH	SUS
Fren (BR)	-	-	-	-	-	-
Dümen (STR)	-	0,60	0,00	0,00	0,20	0,10
Gövde (BF)	-	0,20	0,90	0,00	0,05	0,10
Motor (EG)	-	0,00	0,00	0,95	0,05	0,00
Tekerlekler (WH)	-	0,10	0,05	0,05	0,50	0,320
Süspansiyon ve Tampon (SUS)	-	0,10	0,05	0,00	0,20	0,60

Çizelge 5.6 Motorsiklet dizaynına ait fonksiyonlara göre alternatiflerin karşılaştırmaları
W₄₄

Fonksiyon	Hızlanma					
Parçalar	BR	STR	BF	EG	WH	SUS
Fren (BR)	-	-	-	-	-	-
Dümen (STR)	-	0,80	0,05	0,00	0,00	0,10
Gövde (BF)	-	0,00	0,75	0,00	0,00	0,20
Motor (EG)	-	0,00	0,00	0,95	0,10	0,00
Tekerlekler (WH)	-	0,10	0,10	0,05	0,85	0,00
Süspansiyon ve Tampon (SUS)	-	0,10	0,10	0,00	0,05	0,70

Çizelge 5.5. ve Çizelge 5.1'deki değerleri kullanarak,

$$W_{A3} = W_{43} \times W_{23} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,090 \\ 0,220 \\ 0,343 \\ 0,173 \\ 0,175 \end{bmatrix}$$

$$W_{A4} = W_{44} \times W_{24} = \begin{bmatrix} 0,000 \\ 0,055 \\ 0,160 \\ 0,410 \\ 0,300 \\ 0,075 \end{bmatrix}$$

elde edilir.

Yukarıdaki dört sütunu birlikte gruplandırma ile W_A matrisi oluşur.

$$W_A = (W_{A1}, W_{A2}, W_{A3}, W_{A4})$$

7.Adım: Sonuç olarak, W_A ile W_C matrislerini çarpmayla alternatifler için genel öncelikler aşağıdaki şekilde elde edilir.

$$W_A \times W_C = \begin{bmatrix} 0,095 \\ 0,097 \\ 0,196 \\ 0,258 \\ 0,250 \\ 0,140 \end{bmatrix}$$

Neticede sonuçlarımız,

(Fren, dümen, gövde, motor, tekerlekler, süspansiyon)

$$= (0,095 \ 0,097 \ 0,196 \ 0,258 \ 0,250 \ 0,140)$$

Bu sonuçlar aşağıdaki şekilde yorumlanır. En önemli parça motordur ve bu parçada tekerleklerden çok az bir farkla daha önemlidir. Bir sonraki parça ise, taşınma için, tekerlekler ve motorun üzerine takılması nedeniyle diğer tüm şeylerin taşınmasından dolayı gövdedir. Diğer üç parça ise hemen hemen eşit derecede önemlidir. Bu durum bir motosiklet dizayncısı tarafından belirtilen parçaların önemidir. Alıcı ya da müşteri tüm

motosikletler aşığı yukarı yeterli gövde ve tekerleklerle sahiptir gibi daha farklı bir bakış açısına sahip olabilir. Dikkatini motor gücü ve dümene yöneltebilir (Saaty, 1989).

ÖRNEK 3- Voleybol

Voleybol, takım çalışması ve basit becerilerin oyunudur. Oyuncuların oyun süresince kurallar gereğı pozisyon değıştirmeleri istendiğinden, her oyuncudan tüm temel becerilerini sergilemesi beklenir.

Sadece, bazı oyuncular tüm becerilerini ustalıkla sergileyebildiğinden, bir voleybol antrenörünün sahadaki oyunun her rotasyon (dönüşüm) pozisyonunda uygun beceri ortalamasına sahip oyuncuları kullanması gerekir. Beceriye dayalı bir ölçüm, bir antrenörün oyuncularını becerilerine göre değıerlendirmesini ve doğru oyuncu kombinasyonunu sağlar. Verilere dayalı hiyerarşik analiz teknikleri, burada voleybol problemine uygulanmıştır. Burada oyun ve kurallarına ilişkin temel bilgilere sahip olduğu varsayılmıştır. Hücumda; her takım, topu ağa yakın oynayan ve rakip sahaya indiren uzun boylu veya iyi sıçrayan bir oyuncuya (smaçöre) geçirmeyi hedefler. Defansta ise; bir ya da iki oyuncu, rakip smaçörün önüne sıçrayarak gönderilen topu bloke etmeye çalışırlar. Her iki sahadaki ağdan (fileden) uzak diğey oyuncular ise, ağ üzerindeki oyunu destekleyen ustalıklar sergilerler.

Temel beceriler, ofansif (hücum) ve defansif (savunma) olarak ikiye ayrılır.

3.1. Ofansif Beceriler

Servis: Oyun, topun ağ üzerinden rakip takıma gönderilmesi ile başlar. Voleybolda sayı, sadece servisi atan takım tarafından kazanılır. Ya da karşılayan takım servis kazanır. Voleybolda servis atmak ofansif bir ustalıktır ve çoğı oyuncu topu ağdan çok hızlı aşırarak direkt sayı yapar.

Pas: Pas verme, topu ağa yakın oynayan smaçörün hava sahasına yükseltme olarak nitelenebilir. Topun, bir takım tarafından en fazla üç kez oynandıktan sonra rakip alana geçirilmesi gerekir. İlk vuruşta top, sahanın ortalarında ağa yakın bir yere geçirilir. Pasör

SAVUNMA: B TAKIMI

- Oyuncular B₁ ve B₂ ağı doğru koşarak sıçrarlar ve oyuncu A₃'ün smaçını bloke etmeye çalışırlar.
- B takımının diğer oyuncuları tipik alan savunması pozisyonuna geçerler.
- Oyuncular B₃, B₄, B₅ ve B₆ oyuncularına oyunun savunucuları, B₁ ve B₂'ye ise oyunun blokçuları denir.

3.2. Defensif Beceriler

Alan Savunması (Fielding): Alan savunması, rakip tarafından ağ üzerinden aşırılan ve bloke edilemeyen topu karşılama becerisidir. Bu beceri; sadece henüz yere değmemiş sert bir topu oyunda tutmakla kalmaz, aynı zamanda karşılanan topu pasöre geçirerek takımın hücumu kaldırılmasını da gerektirir.

Blok (Blocking): Daha önce de açıklandığı gibi blok; topu rakip alana düşürmeyi amaçlayan karşı takım smaçörü önünde sıçramak ve engellemeye çalışmaktır.

Servis Karşılama (Receivins Serve): Rakip takımın servisini karşılamak, temel bir alan savunması becerisidir. Ancak; voleyboldaki ileri servis atma teknikleri, bu işi başlı başına bir ustalığa dönüştürmüştür.

Saha (Maç) Duygusu: Yalnızca ofansif veya defansif hatta bir beceri dahi sayılmasa da, saha duygusu oldukça karışık fakat gerçek bir faktördür. Bu durum “her zaman doğru anda doğru yerde bulunmak” şeklinde ifade edilir. Bu; sporcular tarafından kolaylıkla anlaşılan ve kabul edilen, fakat aynı şekilde tarif edilemeyen bir faktördür. Bazı oyuncular, topun nereye vurulacağını, veya topa yumuşak ya da sert vurulmasına dair hislere sahiptir. Bu her sporcuda olması gereken bir niteliktir.

3.3. Hiyerarşik Analizler

Oyun-beceri ağırlık faktörlerini tespit etmedeki ilk yaklaşım, Şekil 5.6'da gösterilen hiyerarşiyi kurmak olmalıdır. Beceriler, oyun boyunca tüm oyuncular tarafından sergilenen

bağımsız nitelikler olarak adlandırılır. Her oyuncu, takım arkadaşları ile kendini belirleyici beceriler bazında kıyaslanır.

Hiyerarşinin en üstünde, beceriler, takımın başarısındaki önemli katkıları ile kıyaslanır.

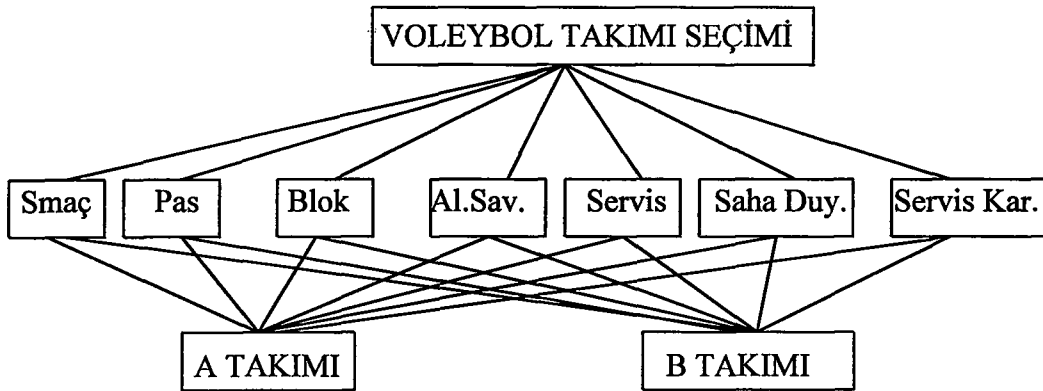
İki farklı “A” ligi takımı bireyleri tarafından, iki beceri karşılaştırma matrisi oluşturulmuştur. Bunlara ilişkin relatif (görel) ölçümler şöyledir:

	Smaç	Pas	Blok	Al.Sav.	Servis	S.Duy.	Ser.Karş.
A Takımı	0,210	0,150	0,080	0,030	0,060	0,040	0,430
B Takımı	0,136	0,142	0,110	0,077	0,055	0,075	0,415

İki takım da, servis karşılamayı en önemli beceri olarak görmektedir. Gerçekten de önemli olmasına karşılık, geçmişte sadece küçük bir yüzde ile ve sadece savunma oyununda kabul görmekte idi.

Smaç; başarılı olması diğer bazı becerilerin (pas, alan savunması v.b.) yeterince sergilenmesi şartına bağlı olmasına karşın oldukça önemli olduğu görülür.

Saha duygusu; herhangi bir sporcunun tahmin edebileceğinden çok daha düşük bir değer elde etmiştir.



Şekil 5.6 Voleybol takımı seçimi hiyerarşisi

Söz konusu takımlar, karşılaştırma kararları verebilen ve tecrübeli takımlar olduğundan, ağırlıklandırmadaki eğilimin beceri faktörleri arasındaki güvenilirliğe bağlı olduğunu

düşünmüşlerdir. Böylelikle, hiyerarşik yaklaşımın voleybol takımı problemini uygun şekilde yansıtmayan bir yöntem olduğu ortaya çıkmıştır.

3.4. Sistem Analizleri

Voleybol oyunu becerisinin öncelikli ağırlıklarını (ölçümünü) sağlayan bir ikinci yöntem de, tüm becerilerin karşılıklı birbirine bağlılığını (interdependency) öngören interaktif sistem yaklaşımıdır. Bunun için, tipik bir voleybol oyunu düzenindeki aksiyon akışına dayalı bir sistem modeli geliştirilmiştir.

Şekil 5.7 sistemin bir blok şemasını göstermektedir.

Sözü edilen akış, aşağıda belirtilen anlamda döngüseldir (cyclical). Top ağı geçtiğinde (servis, amaç, vb.) takım, defansif beceriler sergileyen defans halindedir. Defans performansının kalitesi, takımın hücum kalkış yeteneğini de etkiler.

3.4.1. Ofansif Beceriler

Ofans (Hücum):

	Smaç	Servis	Öncelikler
Smaç	1	9	0,9
Servis	1/9	1	0,1

Smaç, bir hücum oyunudur. Serviste bir hücum manevrası olmakla birlikte, yalnızca oyun açılışlarında kullanılır.

Smaç:

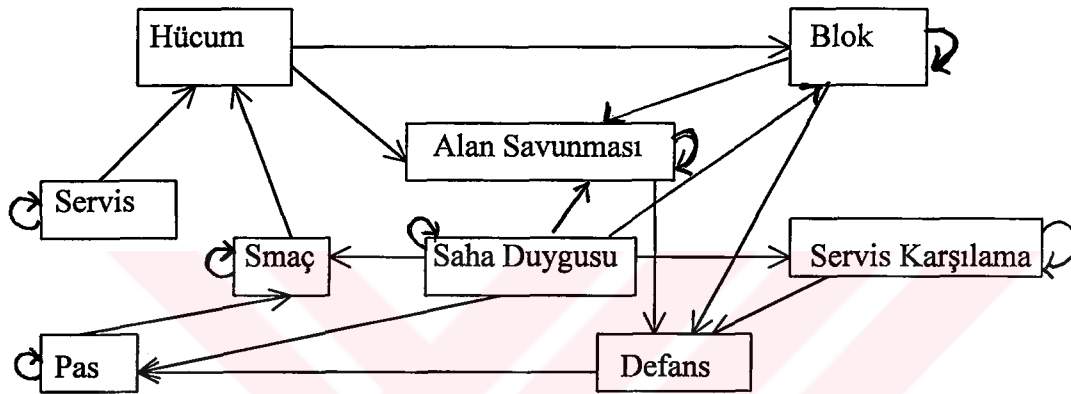
	Smaç	Pas	Sah.Duy.	Öncelikler
Smaç	1	1	4	0,433
Pas	1	1	5	0,466
Saha Duy.	1/ 4	1/5	1	0,100

Smaç yeteneği ile düzgün bir pas eşit önemde addedilirler (deemed). Saha duygusu daha az önemde olmakla birlikte, gözardı edilmemesi gereken bir faktördür.

Pas:

	Pas	Saha Duy.	Defans	Öncelikler
Pas	1	3	1	0,428
Saha Duy.	1/3	1	1/3	0,143
Defans	1	3	1	0,428

Pas yeteneği ve defansif oyun eşit önemdedirler. Saha duygusu burada da katkı sağlayıcı bir faktördür.



Şekil 5.7 Sistem etkileşimleri

3.4.2. Defansif beceriler

Defans (Savunma):

	Alan Sav.	Blok	Ser.Karş.	Öncelikler
Alan Sav.	1	1/2	1/3	0,159
Blok	2	1	1/3	0,252
Ser.Karş.	3	3	1	0,589

Alan Savunması:

	Alan Sav.	Blok	Saha Duy.	Hücum	Öncelikler
Alan Sav.	1	4	1/3	5	0,285
Blok	1/4	1	1/5	3	0,110
Saha Duy.	3	5	1	6	0,547
Hücum	1/5	1/3	1/6	1	0,058

Blok:

	Blok	Saha Duy.	Hücum	Öncelikler
Blok	1	3	3	0,594
Saha Duy.	1/3	1	2	0,249
Hücum	1/3	1/2	1	0,157

Hücumun, alan savunması ve bloğun defansif becerilerini etkilediği görülmektedir. Çünkü iyi bir hücum, rakibin hücum gücünü zayıflatmaya yöneliktir.

Servis Karşılama:

	Servis Karş.	Saha Duy.	Öncelikler
Ser.Karş.	1	3	0,75
Saha Duy.	1/3	1	0,25

Saha duygusu ve servis, kıyaslandıklarında birbirlerinden bağımsız becerilerdir. Bu durumda görelî önem değerleri de 0,5 ve 0,5'tir.

Etkileyici (İnteraktif) Beceriler Matrisi

Çizelge 5.7 İnteraktif beceriler matrisi

	Smaç	Pas	Servis	Alan Sav.	Blok	Saha Duy.	Servis Kar.
Smaç	0,433	0,0	0,0	0,052	0,1413	0,0	0,0
Pas	0,466	0,4286	0,0	0,0	0,0	0,0	0,0
Servis	0,0	0,0	0,1	0,06	0,016	0,0	0,0
Alan Sav.	0,0	0,068	0,0	0,285	0,0	0,0	0,0
Blok	0,0	0,108	0,0	0,11	0,594	0,0	0,0
Saha Duy.	0,1	0,1428	0,0	0,547	0,249	1,0	0,25
Ser.Karş.	0,1	0,252	0,0	0,0	0,0	0,0	0,75

Hücum ve savunma faktörleri matrinden çıkarılarak yerlerine ağırlıklı bileşenler konulmuştur. Çizelge 5.7 değerleri oluşmuştur. Bu matrisi incelerken iki yayılğan

(diffusing) bileşken (servis atma ve saha duygusu) ve bir de sadece kendisi ve bir başka bağımsız bileşkenle etkileşen bir üçüncü bileşken (servis karşılama) olduğu görülür.

Bu beceriler bağımlı bir durumu ortaya koymaktadır, zira oyunun normal akışı içinde cereyan etmezler. Yayılman olmayan becerilere ilişkin bağlantı matrisinin durumu öncelikle, yayılman (bağımsız) becerilerle olan ilişkisi ise daha sonra değerlendirilecektir.

Çizelge 5.8 ana beceri matrisindeki karşılıklı etkileşim altındaki değerlerden oluşan sabit durumdaki geçiş (bağlantı) matrisini göstermektedir, tekrar normalize edilir.

Söz konusu bağlantı becerilerinin sabit durum etkileri, Çizelge 5.8'deki matris değerlerinin kuvveti alınarak bulunur. (Örneğin 50'nci kuvveti, matris çarpımı ile bulunur.)

Çizelge 5.8 Geçiş (bağlantı) matrisi

	Smaç	Pas	Al.Sav.	Blok
Smaç	0,482	0,0	0,116	0,192
Pas	0,518	0,709	0,0	0,0
Alan Sav.	0,0	0,112	0,638	0,0
Blok	0,0	0,179	0,249	0,808

Sonuç matrisi, sıralı olarak özdeş elemanlara sahiptir. Herhangi bir kolonun seçimi, aşağıdaki sabit durum önceliklerini verir.

<u>Smaç</u>	<u>Pas</u>	<u>Alan Sav.</u>	<u>Blok</u>
0,176	0,307	0,113	0,413

Üç yayılman durumu (bileşeni) ağırlıklandırmak için Çizelge 5.7'deki her bir yayılman becerinin yukarıdaki dört beceri üzerindeki etkisi, aşağıda gösterildiği gibi sabit durum vektörü ile çarpılır.

Servis karşılama:

$$(0,176, 0,307, 0,113, 0,413) \times (0, 0,252, 0,0) = 0,077$$

Servis atma:

$$(0,176, 0,307, 0,113, 0,413) \times (0,0, 0,006, 0,016) = 0,067$$

Saha duygusu için, servis karşılama etkisini de eklemek gerekir.

0,077 olarak ölçülen servis karşılama değerini, sabit durum vektörünün beşinci bileşeni olarak ele alır ve yeni vektörü normalize edersek, saha duygusunun toplam etkisi olarak aşağıdaki değere ulaşırız:

Saha duygusu:

$$(0,163, 0,285, 0,105, 0,383, 0,071) \times (0,1, 0,1428, 0,547, 0,249, 0,25) = 0,2276$$

Sonuç ağırlıklı vektörünü belirlemek için, sabit durum beceri vektörü (0,176, 0,307, 0,113, 0,413) son olarak hesaplanan üç bileşen ile büyütülür ve bulunan yeni vektör normalize edilir. Böylece sonuç vektör elde edilmiş olur.

<u>Faktörler</u>	<u>Öncelikler</u>
Smaç	0,128
Pas	0,224
Servis	0,049
Alan Savunması	0,082
Blok	0,301
Saha Duygusu	0,166
Servis Karşılama	0,056

3.4.3. Sonuçların analizi

Bu vektörün analizi, hiyerarşik yöntemden elde edilen vektörle kıyaslandığında, daha olumlu sonuçlar vermektedir. Beceriler daha iyi dengelenmekte ve saha duygusunun etkisi, sezgisel olarak daha somut (representative) bir seviyeye yükseltilmektedir. Tek endişe,

servis atışı (yayılgan) ve servis karşılama (yarı yayılgan) ölçümlerinin daha düşük oranlarda yapılmasıdır. Bu dengeleyici (absorbing) durum faktörlerinin hesaplanmasında kullanılan bir metodun ölçüsü olarak ele alınabilir. Saha duygusu etkilenmemiş gözükmemektedir, çünkü voleybol oyununa asıl katkısı diğer becerilere olan etkisi ile ölçülmektedir. Servis atma ve servis karşılamanın oyunda direkt etkisi vardır, ancak bu etki göz önünde bulundurulmamıştır.

Bu faktörü de dahil etmek için, söz konusu dengeleyici becerilerin etkisinin belirlenmesi, iteraktif etkilere, onun toplam iteraktif etkilerinin çarpımlarının toplamı şeklindedir.

$$\text{Servis atışı} : (0,049) \times 1 + 0,049 = 0,098$$

$$\text{Servis karşılama} : (0,056) \times 0,75 + 0,056 = 0,098$$

Sonuç ağırlık vektörü, servis atışı ve servis karşılama ile ilgili yeni değerleri kullanarak tekrar normalize edilir. Sonuç değerleri Şekil 5.7'deki takım ağırlıklandırma hiyerarşisinde kullanılabilir. Şöyle ki;

<u>Faktörler</u>	<u>Öncelikler</u>
Smaç	0,117
Pas	0,204
Servis atma	0,089
Alan Savunması	0,075
Blok	0,274
Saha Duygusu	0,151
Servis Karşılama	0,089

Daha sonra her iki takım da beceri faktörlerine göre kıyaslanmıştır. Öncelikler şöyle verilmiştir:

	Smaç	Pas	Servis	Alan Sav.	Blok	Saha Duy.	Servis Kar.
A Takımı	0,607	0,524	0,421	0,280	0,522	0,380	0,509
B Takımı	0,393	0,486	0,579	0,720	0,478	0,478	0,491

Bu karşılaştırmanın sonucunda, her iki takımın da görelî güçleri şu şekilde ölçülmüştür (Saaty, 1991).

A Takımı : 0,480

B Takımı : 0,520



6. SONUÇ

Sonuca, AHY'nın kullanışı hakkındaki genel açıklamalarla varıyoruz. Çünkü AHY, soyut faktörleri somut faktörlerden ayırmaz ve ölçümleri ikili karşılaştırmalar yaparak belirler, bu karışık sosyal ve politik problemlerin analizi için kullanışlı bir yoldur. Buradaki öncelikleri belirleme, planlama, kaynak paylaşırma ve öngörü yaşamdaki günlük kararların birer parçası olmuş faaliyetlerden bazılarıdır. Bu kararların kalitesi de şüphesiz başarının en önemli aşamalarındandır.

AHY, problem ayrışması ile sistematik biçimde uğraşır. AHY, her kademedeki elemanların homojen olmasını hiyerarşinin üst kademesinden alt kademesine düşmesi şeklinde sıralanmasını ister. Problem çözmede esnek olduğundan sonuçları artan (azalan) biçimde sıralayarak işlemi başlatır.

Analitik hiyerarşiyi oluşturmak problemdeki sistemi bilmeyi gerektirir. Analistler, seviyeleri ve elemanları, bir veya birkaç alanda odaklamak için çıkarılabilir veya ekleyebilir.

AHY, pekçok alanda başarı ile uygulanmıştır. Bunlar bir şirketin geleceğini planlama ve gelişimindeki çevresel etkileri ölçme, endüstrilere enerji tahsis etme gibi konular olarak gösterilebilir.

Ancak oluşturulan hiyerarşinin non-lineer bir yapıda olması ile bu tür problemlerin çözümü feedback'li sistemler olarak ele alınıp, süpermatris tekniği ile çözülebilir. Günümüzdeki pekçok problem bu yapıda olup, bunların çözümünde kullanılmıştır.

KAYNAKLAR

- Arbel, A., Orgler, Y.E., (1990), "An application of the AHP to bank strategic planning", *European Journal of Operational Research*, 48:57-65, Kuzey Hollanda.
- Candan, E., (1999), İşletme Müh. Bir Yatırım Kararı Destek Modeli İçin Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Sosyal Bilimler Enst., İşletme Müh. 16.
- Emel, G., Emel, E., (1998/2), "Bir İşletmenin Pazar Gücünün Belirlenmesinde Çok Kriterli Bir Yaklaşım", "Verimlilik Dergisi, M.P.M. Yayınları, 53-72.
- Evren R., Ülengin, F., (1992), Yönetimde Karar Verme, T.C.İ.T.Ü. Rektörlüğü Yayını, 5, İTÜ Matbaası-Gümüşsuyu.
- Golden, B.L., Wasıl, E.A. and Edit. Harker, P.T., (1989), *The Analytic Hierarchy Process, Applications and Studies*, 264, Springer-Verlag Berlin- Heildberg .
- Özarpacı, C.G., (1998/6), AHP Yardımıyla Kalite Fonksiyonu, Yüksek Lisans Tezi, İTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Saaty, L.T., (1988), *The Analytic Hierarchy Process*, RWS Publination, 287, Pittsburgh.
- Saaty, L.T., (1990), "How to make a Decision: The Analytic Hierarchy Process", *European Journal of Operational Research*, 48: 9-26, Kuzey Hollanda.
- Saaty, L.T., (1987), "Risk Analysis", *Decision Analysis*, 7 (2):89-101.
- Saaty, L.T., and Takizawa, M., (1989), "Dependence and independence: From linear hierarchies to nonlinear network", *European Journal of Operational Research*, 26:229-237 North-Holland.
- Saaty, L.T., and Vargas, L.G., (1998/8), "Diagonos With Dependent Symptoms: Bayes Theorem And The AHP", *Operations Reseach*, 46 (4): 491-494.
- Saaty, L.T., and Vargas, L.G., (1991), *Prediction, Projection and Forecasting, Applications of the AHP in economics, finance, politics, games and sports*. Kluwer Academic Publishers, 241, Boston/Dordrecth/London.
- Sipahi, S., (1988), Çok Amaçlı Karar Verme Teknikleri ve Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.
- Süer, İ., (1993/3), "Pazarlama Karması Optimasyonunda AHY Uygulaması", *Verimlilik Dergisi, M.P.M. Yayınları*, 85-107.
- Timor, M., (1997/10), "Bir Yöneylem Araştırması Uygulaması Rehine Kurtarma Operasyonunun Analitik Hiyerarşi Prosesi ile Analizi", *İşletme İktisadi Enstitüsü Yönetim Dergisi*, 28:26-27.

Ülengin, F., (1994), "Easing the Traffic in Istanbul: at What Price?", Journal operational Research Society, 45(7):771-785.

Vargas, L.G., (1990/9), "An Duerview of the AHP and its applications", European Journal of Operational Research, 48 (1):2-5.

Yolal, F., (1998), A Tipi Yatırım Fonlarında Etkin Bir Nakit Yönetim Stratejisi Oluşturmada Analitik Hiyerarşi Yaklaşımı, Yüksek Lisans Tezi, İstanbul Teknik Üniversitesi, Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Yozgat, U., (1994), Yönetimde Karar Verme Teknikleri, Beta Basım Yay. A.Ş. Yayınları, 429:4-5.

EK 1 Matris Özdeğer Problemleri

Bir lineer uzay üzerinde A lineer operatörü D (A) tanım kümesiyle verilsin. $x \neq 0$ ve $x \in D(A)$ olmak koşulu ile

$$Ax = \lambda x \quad (6-1)$$

denklemini sağlayan λ skalerine A operatörünün özdeğeri, x 'e ise λ özdeğerine karşılık gelen özvektörü denir.

Eğer verilen lineer uzay R^n , n-boyutlu öklid uzayı ise ve A nxn boyutlu matris ise, o zaman $Ax = \lambda x$ denkleminde bulunan λ 'lar A matrisinin özdeğerleri ve x vektörleri de bu λ 'ya karşılık gelen özvektörler olurlar. (6-1)'deki λ 'ler $\in R$ veya $\lambda \in \mathbb{C}$ (kompleks uzay)

$A_{n \times n}$ 'nin elemanları $a_{ij} \in R$ veya $\mathbb{C}$ 'dan olabilirler.

Yani

$$A = \begin{bmatrix} 1-2i & 3i \\ -5 & -i \end{bmatrix}$$

olabilir. Bu konu ile ilgili bir örnek,

$$\begin{matrix} A & x & \lambda & x \\ \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 5 & -1 & 2 \\ -3 & 2 & -5/4 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} & = & -2 \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix} \end{matrix}$$

bu denklem (-2)'nin λ 'nın özdeğeri yerine $x = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -4 \end{bmatrix}$ özvektörü yerine geçtiğini gösterir.

$Ax = -2x$ şeklindedir.

$$Ax = \lambda x$$

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(6-2)$$

$$(Ax - \lambda I)x = 0$$

$(A-\lambda I)$ matrisi $x \neq 0$ bir x 'i 0 vektörüne dönüştürmektedir. $(A-\lambda I)$ tekildir, o zaman $\det(A-\lambda I)=0$ 'dır.

Bu son denkleme A matrisinin karakteristik denklemi denir. Bu n dereceden bir polinomdur.

$$\det \begin{vmatrix} a_{11}-\lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22}-\lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn}-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ olsun.}$$

$$\det \begin{bmatrix} 1-\lambda & 2 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 3 \\ 2 & 1 & 1-\lambda \end{bmatrix} \text{ hesaplanırsa,}$$

$$-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 2\lambda + 8 = 0$$

$$-(\lambda-4)(\lambda^2 + \lambda + 2) = 0$$

Bu denklemin çözümünden

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

$$\lambda_1 = 4$$

$$\lambda_3 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{7}}{2}i$$

Bu da gösteriyor ki, reel katsayılı bir matrisin özdeğerleri reel olmayabilir. Bu şekilde özdeğerlerin bulunması direkt bir metod olup A matrisinin n boyutu büyük ise bu metodun iyi sonuç vermeyeceği aşikardır. Bununla ilgili olarak çeşitli metodlar vardır. Kuvvet metodu ile özdeğerlerin bulunması, schur çarpanlarına ayırarak özdeğer bulunması, ortagonal çarpanlara ayırım ve en küçük kareler problemi ve özdeğer problemleri için QR algoritması metodları uygulanmaktadır.



Ek 2 Önceliklerin Graf Teorisi ile İlgili Yorumları

Bu teori, hiyerarşi seviyesindeki bağlantıların (aktiviteler) ya da objektifler arasındaki anlamlılığın içine geometrik görüntü vermek için kullanılır.

İkili karşılaştırmalar matrisindeki “daha fazla tercih edilen” etkinliğin daha yüksek öncelik değeri kazandığından nasıl emin olabiliriz? Bu soruyu cebirsel formulla incelediğimiz halde, graf teorisinde oluşan düşüncelerle sezgisel olarak değerlendirebiliriz. Bu konu ile ilgili çeşitli tanımlar aşağıda verilmiştir.

Tanım: G yönlü graphın düğümlerini $1, 2, 3, \dots, n$ ile tanımlayalım. i 'den j düğümüne kadar her x_{ij} yönlü arkıyla, arkın yoğunluğu (yayın yoğunluğu) denenen $0 < q_{ij} < +1$ pozitif sayısı ile ortaklık kurarız.

Tanım: Bir yönlü graphta ilerleme, yayların ve düğümlerin karşılıklı düzenidir ve her düğüm bir önceki düzende arkın hedefi ve bir sonrakinin kaynağıdır. İki arkın da bitiş noktası aynı dizidedir (düzendedir). İlerlemenin uzunluğu, düzende arkların sayısıdır. k uzunluğundaki bir ilerleme (yürüyüş) “ k -ilerlemesi” diye adlandırılır.

Tanım: i düğümünden, j düğümüne olan k uzunluğunun ilerleme yoğunluğu, yayların yoğunluklarının ilerlemedeki ürünleridir.

Tanım: i düğümünden, j düğümüne olan bütün k -ilerlemelerin toplam yoğunluğu, ilerlemelerin yoğunlukları toplamıdır.

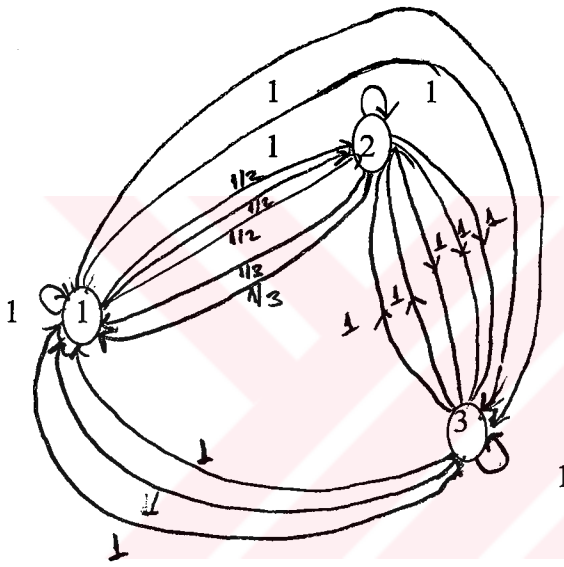
Burada i -ilerlemesinin toplam yoğunluğu için i 'den j 'ye bütün i -ilerlemelerinin yoğunluk toplamı alınır. Bunlar basit olarak i ve j 'yi birleştiren arklardır. i, j arkındaki bütün yoğunluklar eşit farzedilir. Böylece i 'den j 'ye toplam yoğunluk $t_{ij} = p_{ij} \cdot q_{ij}$ ile verilir. Burada p_{ij} , i 'den j 'ye olan arkların sayısı, q_{ij} ise her arkın yoğunluğudur.

Tanım: D yönlü graphı verilmiş, $U = (u_{ij})$ yoğunluk tesir matrisi her i ve j için u_{ij} verilerek tamamlanmış matrisle tanımlanır.

Bu konu ile ilgili aşağıdaki örneği inceleyelim.

Her arkın yanındaki sayı, yoğunluğu belirtmektedir. Bu graph ile oluşan U yoğunluk tesir matrisi;

$$U = \begin{bmatrix} 1 & 3/2 & 2 \\ 2/3 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{bmatrix} \text{ 'dir.}$$



i'den j'ye ola 1-ilerlemeleri toplam yoğunluğu bu matrisin (i,j) elemanları ile verilmiştir.

Düğüm 1'den düğüm 3'e, 2 uzunluğundaki ilerlemenin toplam yoğunluğu üç değer toplamına eşittir. Her ilk iki düğüm arasındaki ark bir kere, iki düğüm arasındaki ark da bir kere yer almıştır.

$$3[(1/2 \cdot 1) + (1/2 \cdot 1) + (1/2 \cdot 1)]: 1, x_{12}, 2, x_{23}, 3$$

$$2 \cdot (1 \cdot 1) : 1, x_{11}, 1, x_{13}, 3$$

$$2 \cdot (1 \cdot 1) : 1, x_{13}, 3, x_{33}, 3$$

Bu değerler toplamı $17/2$ 'ye eşittir. Bu, u^2 matrisinin (1,3)'deki elemanıdır. Şu halde her i ve j için, i düğümünden j düğümüne olan 2-ilerlemesinin yoğunluğu matrisin elemanlarıdır.

$$U^2 = \begin{bmatrix} 8 & 7 & 17/2 \\ 31/3 & 8 & 22/3 \\ 22/3 & 17/2 & 13 \end{bmatrix}$$

Bu sonuç aşağıdaki teorem ile genellenebilir.

Teorem: U^k 'nın (i,j) elemanı olan $U_{ij}(k)$, i düğümünden j düğümüne olan k - ilerlemesinin toplam yoğunluğudur.

Bir Özelliğe Göre Baskınlık (Üstünlük-Dominance) Kavramı

İkili karşılaştırmalar işlemindeki her n aktivitesini, D yönlü grafın bir düğümü olarak alabiliriz. Bu durumda U yoğunluk-tesir matrisi (intensity-incidence matrix) daha önceki karar matrisine benzerdir. Bu matrisin (i,j) elemanın p_{ij} numaratörü, i tepesinden (vertese), j tepesine (vertex) kadar yönelen (kontrol edilen) arkların sayısını belirtir. i 'den j 'ye bütün arkların yoğunluğu aynıdır, elemanların paydası (denominator) q_{ij} reciprocaline eşittir. Bu da $q_{ij}=1$ olduğunda ilgili graphı tanımlamanın doğal bir yoludur. Bu, k kuvveti, k uzunluklu ilerlemenin sayısını veren sıradan tepe matrisine indirger.

A matrisinin (i,j) pozisyonundaki elemanı, i aktivitesinin j aktivitesine göre olan öneminin direkt kontrolü ya da yoğunluğu olarak yorumlanabilir. Aktivite i 'nin belli bir nesneyi tanımlaması için yaptığı, aktivite j tarafından yapılan yardımların kıyaslanmasını belirtir. A 'nın normalize edilmiş satır (row) toplamı bütün diğer aktivitelerle bağlantılı yerini tutan aktivitelerin yardım seviyesini verir.

A^2 , normalize edilmiş satır (row) toplamı kontrolünü, bağlantılı önemini bütün 2-ilerlemelerini göz önüne almayı sağlar. Böylece parçalar arasındaki dolaylı karşılaştırmayı tek orta tepe üzerinden verir. (a single intermediate vartex). Buradan bir aktivitenin önemlilik seviyesi, diğer sıralı aktivitelerin dayanışmasına (interdependence) bağlı olarak değişir veya yazılır. Genelde, aktiviteler arasındaki kontrolün net etkisi, A 'nın k 'ncı

kuvveti olan A^k 'nın satır (row) toplamının limit değerinin alınması ile elde edilir. Bu satır toplamalarının toplamı ile normalize edildiğinde, her bir sayı aktiviteler arasında öncelik veya bağıllık kontrolünün bir genel indeksi olur.

Aktivite i 'nin başka bir j aktivitesi üzerinde bağlantılı üstünlüğü, baskınlığı, k - adımlardaki direkt veya dolaylı orta aktiviteler A^k matrisinin (i,j) elemanı ile verilir.

Her tepedeki hazır bulunan döngüsü yüzünden, A^k 'nın her elemanı k 'dan daha az ya da eşit ilerlemelerin uzaklık toplamıdır.

Teorem: $A = (a_{ij})$, $n \times n$ boyutlu karşılaştırmalar matrisi olsun. A^k matrisinin (i,j) elemanı $a_{ij}(k)$, i aktivitesinin j aktivitesine k . adımlarındaki bağlantılı baskınlığını (önemini) verir.

Tanım: i aktivitesinin bütün diğer aktivitelere k - adımda kontrolün bir indeksi (an index of dominance) $W_i(k)$ şöyledir:

$$W_i(k) = \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(k)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)}$$

O zaman $W_i(k)$, A^k 'nın i 'nci satırının toplamının, satırların toplamıyla bölünmesiyle bulunur.

Tanım: i aktivitesinin bütün diğer aktivitelere W_i kontrol indeksi şöyledir:

$$W_i = \lim_{k \rightarrow \infty} W_i(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\sum_{j=1}^n a_{ij}(k)}{\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij}(k)}$$

Tanım: i aktivitesi ile birleşmiş öncelik indeksi, W_i toplam kontrol indeksidir (Saaty, 1988).

Ek 3 Matrisler İle İlgili Tanımlar

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2$$

.....

$$a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n$$

formunda lineer denklem sisteminde $x_{11}, x_{21}, \dots, x_n$ bilinmeyenlerini bulmaktır. a_{ij}, b_i ve x_i 'ler reel olacaktır.

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ a_{12} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Yukarıdaki A matrisine katsayılar matrisi denir. $A_{n \times n}$, n satır ve n sütunlu bir matristir. A_{ij} ile matrisin i'nci satırın, j'nci sütununu kestiği eleman kastedilir. Bu matrisi $A_{ij} = A(i,j) = a_{ij}$ rotasyonu ile gösterilir.

$$Ax = b$$

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}_{n \times 1} \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}_{n \times 1}$$

λ skaler ve A matrisi için,

$$\lambda A = \begin{bmatrix} \lambda a_{11} & \dots & \lambda a_{1n} \\ \lambda a_{12} & \dots & \lambda a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \lambda a_{n1} & \dots & \lambda a_{nn} \end{bmatrix} \quad \text{yani } (\lambda A)_{ij} = \lambda_{ij} \text{ 'dir.}$$

A^T ile A matrisinin transpozu gösterilir ve a_{ij} 'den a_{ji} elde edilir. Satırlarla sütunlar yer değiştirilir.

Tanım: Eğer $A^T=A$ ise A matrisine simetrik matris denir.

Tanım: A matrisi $\forall x \neq 0$ için $x^T A x > 0$ şartını sağlar ise A 'ya pozitif tanımlıdır denir.

Tanım: $A_{n \times n}$ boyutlu bir matris ise,

$$A_k = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{nk} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2k} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kk} \end{bmatrix} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

matrislerine A 'nın k 'nci baş minörü denir.

Bu kısımda Bölüm 4'de verilen çeşitli matrislerin daha iyi kavranılması için tanımlar ve bunlarla ilgili teoremler verilecektir.

İndirgenemez Matrisler (Irreducible matrices)

Bir A karematris aşağıdaki şekilde ayrıştırılamıyorsa, bu matrise indirgenemez matris denir.

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & O \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

Buradaki A_1 ve A_3 kare matris ve O , sıfır matristir. Aksi taktirde bu A matrisine indirgenebilir (reducible) matris denir.

Aşağıda verilen matris bir indirgenebilir matristir.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 4 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Bu matrise graphda karşılık gelen durum, birinciden, birinci ve üçüncü tepeye (vertices) bir ark ile ve aynı şekilde üçüncüden, birinci ve üçüncü tepeye bir arkla birleştirilmiştir. Fakat ikinci tepeye onlardan hiçbir şekilde gidilmemektedir. İkinci tepeden ise kişi tüm tepelere gidebilir.

Böylece birinci ve üçüncü tepe bir indirgenemez bileşen formundadır ve ikinci onlara birleştirilmiştir. Yukarıdaki A matrisinde ikinci ve üçüncü sütunu yer değiştirip, ikinci ve üçüncü satırları yer değiştirdiğimizde aşağıdaki şekle dönüşür.

$$A = \begin{bmatrix} -2 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ A_2 & A_3 \end{bmatrix}$$

Buradaki A_1 ve A_3 ve kare matris ve A_1 indirgenemezdir. Bir yönlü graph matrisinin kuvvetli bağlantı ve indirgenemez özellikteki matrisin denkliklerini gösteren teoremler aşağıda verilmiştir.

Teorem: Bir $n \times n$ boyutlu A kompleks matrisinin indirgenemez olması için gerek ve yeter şart $D(A)$ yönlü graphın kuvvetli bağlantılı olmasıdır.

Teorem: Bir A kare matrisi, indirgenemez matrisin bir blok diagonal matrisi indeksini, diğer blok matrisleriyle yer değiştirme ile ya indirgenemez ya indirgenebilir. Matris aşağıdaki normal (doğal) şekildedir.

$$\begin{bmatrix} A_1 & 0 & \dots\dots\dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & \dots\dots\dots 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{k+1,1} & A_{k+2,2} & & A_{k+1,1} & A_{k+1} & 0 \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{m1} & A_{m2} & & A_{mk} & A_{m1,k+1} & A_m \end{bmatrix}$$

Teorem: $A \geq 0$ ve indirgenemez olsun. O zaman

- (1) A matrisi, bir gerçel (reel) pozitif değeri $\lambda_{\max}$ özdeğerine sahiptir.
- (2) A matrisinin, $\lambda_{\max}$ özdeğerine karşılık gelen özvektörü pozitif bileşendir ve esaslı olarak tektir.
- (3) $\lambda_{\max}$ sayısı (A'nın perron root (kökü)) aşağıda verilmiştir.

$$\lambda_{\max} = \max_{x \geq 0} \min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} = \min_{x \geq 0} \max_{1 \leq i \leq n} (Ax)_i \quad (x \geq 0 \text{ keyfi})$$

Sonuç olarak, $A \geq 0$ indirgenemez ve $x \geq 0$ keyfi olarak seçilmiş olsun. Böylece A'nın perron kökü aşağıdaki şartı sağlar.

$$\min_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i} \leq \lambda_{\max} \leq \max_{1 \leq i \leq n} \frac{(Ax)_i}{x_i}$$

Teorem: A, nxn boyutlu pozitif bir matris ve $\lambda_{\max}$ en büyük özdeğer olsun.

- (1) $\lambda_{\max}$ maksimum satır toplamı ile yukarıdan ve minimum satır toplamı ile aşağıdan sınırlandırılmıştır.

O zaman eğer A matrisi stokastik matris ve satırları toplamı bir ise o zaman $\lambda_{\max}=1$ 'dir.

- (2) A bir stokastik matrisi için

$$\lim_{k \rightarrow \infty} A^k = ev$$

$$k \rightarrow \infty$$

dir. Buradaki $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ gibi bir pozitif satır vektörü ve

$$\sum_{i=1}^n v_i = 1 \text{ ve } e = (1, 1, \dots, 1)^T \text{ dir.}$$

- (3) Bir pozitif A matrisi için, bir λ pozitif sabiti, V sıfır olmayan satır vektörü ve W sıfır olmayan sütun vektörü vardır. Öyle ki,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k}{\lambda^k} = w.v$$

λ , A'nın en büyük özdeğeridir ve esas (principal) özdeğer, w ve v esas özvektör diye adlandırılır.

(4) Eğer λ_1 , A'nın en büyük özdeğeri, eğer $i \neq j$ için $\lambda_i \neq \lambda_j$ ve λ_j 'ye karşılık gelen sağ özvektör w_i ise

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{A^k \cdot e}{e^T \cdot A^k e} = c \cdot w_1$$

Bir nonnegatif indirgenemez matrisin primitif olması için gerek ve yeter şart bir $m \geq 1$ sayısı vardır ki $A^m > 0$ 'dır. Aksi taktirde ise imprimitif diye adlandırılır.

Bir primitif matrisin graphı, herhangi iki tepe arasında bir yolun uzunluğu $\geq m$ 'dir.

Teorem: Eğer pozitif A matrisi tutarlı ise, o zaman herbir satır, verilen satırların birinin pozitif bir katıdır.

Teorem: Eğer A, pozitif ve tutarlı ise, o zaman $a_{ii}=1$ ve $a_{ij}=1/a_{ji}$ 'dir.

Teorem: Bir pozitif A matrisi tutarlı olması için gerek ve yeter şart bu matrisin birim ranka ve matrisin esas diagonal elemanlarının toplamı bire eşit olmalıdır.

Reciprocal Matrisler (Karşıt Matrisler)

Bir A matrisi $a_{ij}=1/a_{ji}$ özelliğini sağlıyorsa, bu matrise reciprocal matris denir.

Teorem: Pozitif reciprocal matrisin özdeğerleri aşağıdaki denklemi sağlar.

$$\sum_{\substack{j,k \\ j \neq k}} \lambda_j \cdot \lambda_k = 0$$

Teorem: $A = (a_{ij})$ matrisi pozitif elemanlı ve $a_{ji} = a_{ij}^{-1}$ özelliğine sahip bir matris olsun. A matrisinin tutarlı olması için gerek ve yeter şart $\lambda_{\max} = n$ olmalıdır.

Teorem: 2x2 boyutlu her pozitif matris tutarlıdır.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	03.08.1975	
Doğum Yeri	İstanbul	
Lise	1988-1991	Plevne Lisesi
Lisans	1991-1995	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	1995-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Bölümü Bilim Dalı Uygulamalı Matematik Programı Ana Bilim Dalı
Çalıştığı kurum	1995-Devam ediyor	M.E.B. Mithatpaşa İ.Ö. Okulu Matematik Öğretmeni

