

**YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

BULANIK ALT MODÜLLER

Matematikçi Ferdi ÇELİKER

**FBE Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında
Hazırlanan**

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı: Yrd. Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY

İSTANBUL, 2007

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iii
ÖNSÖZ.....	iv
ÖZET.....	v
ABSTRACT.....	vi
1. GİRİŞ.....	1
2. TEMEL KAVRAMLAR.....	2
2.1 Bulanık Kümeler.....	2
2.2 Bulanık Alt Gruplar.....	4
2.3 Bulanık Halkalar ve İdealler.....	4
2.4 Modüller.....	5
3. BULANIK ALT MODÜLLER.....	7
4. BÖLÜM MODÜLLERİNİN L-ALT MODÜLLERİ.....	14
5. L-ALT KÜMELERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN L-ALT MODÜLLERİ....	19
6. SERBEST L-ALT MODÜLLER.....	22
7. ÇÖZEN BÖLÜMLER.....	24
8. ASALLANABİLİR L-ALT MODÜLLER.....	32
9. SONUÇLAR.....	39
KAYNAKLAR.....	40
ÖZGEÇMİŞ.....	41

SİMGE LİSTESİ

$\wedge$	Minimum veya infimum
$\emptyset$	Boş küme
I	Boş kümeden farklı indeks kümesi
$\in$	Elemanıdır
$\notin$	Elemanı değildir
$\subseteq$	Alt küme
$\supseteq$	İçerir
$A \setminus B$	A fark B
$[0,1]^X$	X'in bulanık kuvvet kümesi
$\mu(X)$	$\mu(X) = \{\mu(x) : x \in X\}$, μ 'nün görüntüsü
$Im(\mu)$	$Im(\mu) = \{\mu(x) : x \in X\}$, μ 'nün görüntüsü
μ_a	μ 'nün a-seviye alt kümesi
$\cup$	Kümelerin birleşimi
$\cap$	Kümelerin kesişimi
$f(\mu)$	μ 'nün f altındaki görüntüsü
$f^{-1}(\nu)$	ν 'nin f altındaki ters görüntüsü
$\mu \circ \nu$	μ ve ν 'nin bileşkesi
μ^{-1}	μ 'nün tersi
$[0,1](G)$	G grubunun bütün bulanık alt gruplarının kümesi
$\langle \mu \rangle$	μ ile üretilen G grubunun bulanık alt grubu
G/μ	G'nin μ bulanık normal alt grubuna göre bölüm grubu
ν/μ	Bulanık bölüm grubu
$\sqsubset$	Zayıf homomorfik
$\sqsubset$	Zayıf izomorfik
$\approx$	Homomorfik
$\cong$	İzomorfik

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanmasında yardımlarını esirgemeyen sayın hocam Yrd. Doç. Dr. Bayram Ali ERSOY'a ve maddi manevi her türlü desteğini gördüğüm sevgili eşim Fatma ÇELİKER'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

Bu tezde klasik cebirdeki modül kavramı bulanık cebirde incelenmiştir. Öncelikle bu konu ile ilgili temel tanımlar ve teoremler verilmiştir. Daha sonra bulanık modülün tanımı yapılarak bulanık modül ile klasik cebirdeki modül arasındaki bağlantı gösterilmiştir. Örneklerle beraber bir bulanık modül yapısının nasıl oluşması gerektiği ifade edilmiştir. Bundan sonra ise bölüm modüllerinin bulanık alt modüllerinin nasıl inşa edileceği gösterildi. Bu kısımda zayıf homomorfizma ve izomorfizma kavramlarının bulanık modüllerle ifadesi verilmiştir. Bulanık alt küme tarafından üretilen modüller gösterildikten sonra serbest modüllerin karşılığı olarak serbest bulanık modüller tanıtılmıştır. Çözen bölümler verilerek asallanabilir bulanık alt modüller sunulmuştur. Sonuç olarak bu çalışma klasik cebirdeki modül ile bulanık modül arasındaki bağıntılarla ilgilidir. Bu alanda çalışma yapmak isteyenlere temel kaynak teşkil edecek nitelikte bir tezdur. Bundan sonraki çalışmalarımız modüllerin diğer alanlarının bulanık cebirdeki yansımalarının ne olduğu ve ne olabileceği ile ilgili olacaktır.

Anahtar Kelimeler: Bulanık alt grup, Bulanık halkalar, Bulanık idealler, Bulanık modüller, Bulanık alt modüller.

ABSTRACT

In this thesis the concept of module of classical algebra is analyzed within the context of the fuzzy algebra. Initially, the basic properties and theorems are given about the subject. Then fuzzy module is defined and the relation between the fuzzy module and the module in classical algebra is demonstrated. It has been noted that how a fuzzy module structure should be formed with examples. Following that, we noted that how the fuzzy submodules of quotient modules are combined. In this section, the expression of the concept of weak homomorphism and isomorphism with the fuzzy modules takes place. After the modules that are created by the fuzzy subset is demonstrated, free fuzzy modules are introduced as a reflection of free modules. Given the residual quotients, primary fuzzy submodules are presented. As a result, this thesis is about relations between the concept of modules of classical algebra and the fuzzy modules. It is also a well-qualified thesis that poses a basic resource for whom may study in this field. Our following efforts will focus on what the reflection of other fields of the modules within the fuzzy algebra is and could be.

Keywords: Fuzzy subgroup, Fuzzy rings, Fuzzy ideals, Fuzzy modules, Fuzzy submodules.

1. GİRİŞ

Bulanık Mantık'ın ilk kez 1965 yılında L.A. Zadeh tarafından ortaya konulmasından kısa bir süre sonra, bu mantığa olan gereksinim, ona karşı olan ilginin hızla artmasıyla, kendiliğinden kanıtlanmıştır. Özellikle 1980'li yılların ortalarından itibaren, gerek bilimde ve gerekse teknolojiye kullanılmaya başlanması ile bu iki alanda da farklı düzeylerde inanılmaz gelişmelerin yaşanmasına neden olmuştur.

L. A. Zadeh'in öğrencisi C. L. Chang 1968 yılında "Bulanık Topolojik Uzaylar" adlı makalesinden sonra bir cebirci olan Azriel Rosenfeld, "Eğer Chang bunu topolojik uzaylar için yapabiliyorsa, ben de bunu cebirsel yapılar için yapabilirim ", diyerek yola koyuldu ve 1971 yılında "Bulanık Gruplar" adlı makalesini yayınladı. Bu bulanık cebir alanında yayınlanan ilk eserdir. Daha sonra birçok bilim adamı tarafından cebirin hemen hemen bütün yapılarında kullanılarak geliştirilmiştir.

Bu tezimizde yüksek lisans ve doktora öğrencilerine temel teşkil edecek biçimde bulanık değişmeli cebirdeki bazı yapıları inceledik. İlk bölümde bulanık gruplardaki temel yapılar ve bunların klasik değişmeli cebirdeki yapıları ve bunlar arasındaki ilişki incelenmiştir. Örneklerle beraber temel teoremlerin varlığı gösterilmiştir.

İkinci bölümde ise yeni bir yapı olarak bulanık modül kavramı verilip bununla ilgili temel teoremler verilmiştir. Daha sonra bölüm modülü asallanabilir alt modül kavramlarının bulanık gruplardaki ifadeleri gösterilmiştir.

2. TEMEL KAVRAMLAR

2.1 Bulanık Kümeler

Tanım 2.1.1: S herhangi bir küme olmak üzere, $\mu: S \rightarrow L$ şeklinde tanımlanan μ fonksiyonuna S nin L -alt kümesi denir. Eğer $L = [0,1]$ olarak alınırsa L -alt kümeye bulanık alt küme denir. Tezimizin tamamında iki kavramda kullanılacak ve eşdeğer kabul edilecektir. S nin bütün bulanık alt kümelerinin oluşturduğu kümeye S nin bulanık kuvvet kümesi denir ve $[0,1]^S$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.2: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\{\mu(x) : x \in S\}$ ile tanımlanan kümeye μ 'nün görüntü kümesi denir ve $\mu(S)$ ya da $\text{Im}(\mu)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 2.1.3: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\mu^* = \{x : \mu(x) > 0, x \in S\}$ kümesine μ 'nün destekleyicisi denir. Eğer μ^* sonlu bir küme ise μ 'ye sonlu bulanık küme, μ^* sonsuz bir küme ise μ 'ye de sonsuz bulanık küme denir. Ayrıca $1 \in \mu(S)$ ise μ 'ye S 'nin birimli bulanık alt kümesi denir.

Tanım 2.1.4: $Y \subset S$ ve $a \in [0,1]$ olmak üzere $a_Y \in [0,1]^S$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$a_Y(x) = \begin{cases} a; & x \in Y \\ 0; & x \notin Y \end{cases} \quad (2.1)$$

Özel olarak; eğer $Y = \{x\}$ ise a_Y kümesi $a_{\{x\}}$ şeklinde ifade edilir ve $[0,1]$ -nokta (point) veya $[0,1]$ singleton adı verilir.

Eğer $a=1$ ise

$$1_Y(x) = \begin{cases} 1; & x \in Y \\ 0; & x \in S \setminus Y \end{cases} \quad (2.2)$$

fonksiyonuna karakteristik fonksiyon denir.

Tanım 2.1.5: $\mu, \nu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\forall x \in S$ için $\mu(x) \leq \nu(x)$ ise ν bulanık kümesi, μ bulanık kümesini kapsar denir ve $\mu \subseteq \nu$ şeklinde gösterilir.

Tanım 2.1.6: $\mu, \nu \in [0,1]^S$ olmak üzere $\mu \cap \nu, \mu \cup \nu \in [0,1]^S$ kümeleri şu şekilde tanımlanır:

$\forall x \in S$ için

$$(\mu \cap \nu)(x) = \mu(x) \wedge \nu(x) \quad (2.3)$$

$$(\mu \cup \nu)(x) = \mu(x) \vee \nu(x) \quad (2.4)$$

dir

Tanım 2.1.6’da verilen iki bulanık fonksiyon arasındaki kesişim ve birleşim işlemleri herhangi bir bulanık fonksiyon ailesi için de genelleştirilebilir.

Tanım 2.1.7: $\mu \in [0,1]^S$ olmak üzere $a \in [0,1]$ için $\mu_a = \{ x : x \in S, \mu(x) \geq a \}$ kümesine μ ’nün seviye alt kümesi denir.

Teorem 2.1.8: $\mu, \nu \in [0,1]^S$ olmak üzere, aşağıdaki ifadeler doğrudur.

$$\text{i) } \mu \subseteq \nu, a \in [0,1] \Rightarrow \mu_a \subseteq \nu_a$$

$$\text{ii) } a \leq b, a, b \in [0,1] \Rightarrow \mu_b \subseteq \mu_a$$

$$\text{iii) } \mu = \nu \Leftrightarrow \mu_a = \nu_a, \forall a \in [0,1]$$

Tanım 2.1.9: X, Y herhangi iki küme ve $\mu \in [0,1]^X, \nu \in [0,1]^Y$ ayrıca $f : X \rightarrow Y$ bir tasvir olsun. $f(\mu) \in [0,1]^Y$ ve $f^{-1}(\nu) \in [0,1]^X$ bulanık kümeler olmak üzere

$\forall y \in Y$ için,

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \vee \{ \mu(x) : x \in X, f(x) = y \} & ; f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ; f^{-1}(y) = \emptyset \end{cases} \quad (2.5)$$

$\forall x \in X$ için,

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu(f(x)) \quad (2.6)$$

şeklindeki fonksiyonlara sırasıyla f ’nin μ altındaki görüntüsü ve f ’nin ν altındaki ters görüntüsü denir.

2.2 Bulanık Alt Gruplar

Tanım 2.2.1: G bir grup ve $\forall \mu, \nu \in [0,1]^G$ bulanık kümeleri olmak üzere, $\forall x \in G$ için $(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) : y, z \in G, yz = x \}$ 'dir.

$\mu^{-1}(x) = \mu(x^{-1})$ olarak μ bulanık kümesinin tersi tanımlanır.

Tanım 2.2.2: G bir grup ve $\mu \in [0,1]^G$ olsun. Eğer μ aşağıdaki koşulları sağlıyorsa μ 'ye G 'nin bulanık (fuzzy) alt grubu denir.

$$(G1) \quad \forall x, y \in G \text{ için, } \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$$

$$(G2) \quad \forall x \in G \text{ için, } \mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$$

Tanım 2.2.3: G bir grup, μ , G 'nin bulanık alt grubu ve e , G 'nin etkisiz elemanı olmak üzere $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\}$ şeklinde tanımlanır.

Ayrıca $n \in \mathbb{Z}$ olmak üzere $\forall x \in G$ için (G1) koşulundan $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ elde edilir.

2.3. Bulanık Halkalar ve İdealler

Tanım 2.3.1: R bir halka μ, ν R halkasının bulanık alt kümeleri olsun. $\mu + \nu, -\mu, \mu - \nu, \mu \circ \nu$ bulanık alt kümeleri aşağıdaki gibi tanımlanır: $\forall x \in R$,

$$(\mu + \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y + z = x \}, \quad (2.7)$$

$$(-\mu)(x) = \mu(-x), \quad (2.8)$$

$$(\mu - \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, y - z = x \}, \quad (2.9)$$

$$(\mu \circ \nu)(x) = \bigvee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in R, yz = x \}. \quad (2.10)$$

$\mu + \nu, \mu - \nu$ ve $\mu \circ \nu$ sırasıyla μ ve ν 'nin toplamı, farkı ve çarpımı olarak adlandırılır. $-\mu$, μ 'nün negatifi olarak tanımlanır. Tanımdan R bir halka; μ, ν , R halkasının bulanık alt kümeleri $\mu + \nu = \nu + \mu$, $\mu - \nu = \mu + (-\nu)$ 'dir. R halkası değişmeli olduğundan $\mu \circ \nu = \nu \circ \mu$ 'dir.

Tanım 2.3.2: R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. Bu durumda eğer;

$$(R1) \quad \mu(x - y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in R$$

$$(R2) \quad \mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in R$$

sağlanırsa μ 'ye R halkasının bulanık alt halkası denir.

Tanım 2.3.3: R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun ve μ , (R1) şartını sağlasın. Eğer μ ,

$$(R3) \mu(xy) \geq \mu(x) \vee \mu(y) \quad \forall x, y \in R$$

şartını sağlıyorsa R halkasının bulanık ideali olarak adlandırılır. Eğer R bir halka; μ , R 'nin bulanık ideali ise, bu durumda;

$$\mu_* = \{x \in R \mid \mu(x) = \mu(0)\} \quad (2.11)$$

R bir halka ve μ , R halkasının bulanık alt kümesi olsun. R halkası değişmeli olduğundan μ 'nün (R3)'ü sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\mu(xy) \geq \mu(x) \quad \forall x, y \in R \quad (2.12)$$

olmasıdır.

2.4 Modüller

Tanım 2.4.1: R bir halka ve A toplamsal değişmeli bir grup olsun. A üzerinde bir $R \times A \rightarrow A$, $(r, a) \rightarrow ra$ sol dış skaler çarpımı verilsin. Eğer her $a, b \in A$ ve her $r, s \in R$ için

$$i) r(a + b) = ra + rb$$

$$ii) (r + s)a = ra + sa$$

$$iii) (rs)a = r(sa)$$

ise A ya bir sol R -modülü denir.

Burada ra elemanına a 'nın r ile skaler çarpımı denir. Eğer R birimli ise ve her $a \in A$ için $1_R a = a$ ise A ya bir birimsel sol R -modülü denir.

R bir bölenler halkası ise bir birimsel sol R -modülüne R üzerinde bir sol vektör uzayı denir.

Eğer R değişmeli halka ve bir sol R -modülü ise A üzerinde her $a \in A$ ve $r \in R$ için $ar = ra$ eşitliğiyle bir sağ dış çarpım tanımlanır. Bu dış çarpımın bütün modül şartlarını sağladığı aşıkardır. Bundan dolayı R değişmeli ise A 'ya hem sol ve hem de sağ R modülü olarak bakılabilir.

Tanım 2.4.2: R bir halka ve A bir R -modül ve A nın boş olmayan bir B alt kümesi olsun. Eğer

i) B , A nın bir alt grubu

ii) Her $b \in B$ ve $r \in R$ için $rb \in B$ ise B 'ye A 'nın bir alt modülü denir. R bölenler halkası ise B 'ye A 'nın bir alt uzayı denir.

Teorem 2.4.3: R bir halka olsun. R kendi üzerine halka çarpımına göre bir sol R -modülüdür. Bundan dolayı R 'nin alt modülleri ile R 'nin sol idealleri çakışır.

3. BULANIK ALT MODÜLLER

Bu bölümde, bulanık alt modüllerle ilgili bazı fikirler ortaya koyacağız. İlk olarak modüller için L-alt kümelerinde toplama ve skaler çarpmanın işlemlerini inceleyeceğiz. Daha sonra da bu işlemlerle beraber L-alt modül tanımını vereceğiz.

Birimli ve değişmeli R halkası üzerinde bir M sol modül ya da modül için, M toplamsal grup olmak üzere $R \times M \rightarrow M$ 'ye tanımlanan bir $\cdot$ işlemi $\forall r, s \in R, x, y \in M$ için aşağıdaki şartları sağlar:

$$(1) (r + s) \cdot x = r \cdot x + s \cdot x$$

$$(2) r \cdot (x + y) = r \cdot x + r \cdot y$$

$$(3) r \cdot (s \cdot x) = (rs) \cdot x$$

$$(4) 1 \cdot x = x$$

$r \cdot x$ ifadesi için rx yazacağız. Eğer R bir cisim ve M bir R-modül ise M'ye R üzerinde bir lineer uzay ya da bir vektör uzayı denir.

Bu bölümde aksi söylenmedikçe R'yi değişmeli ve birimi 1 olan ($1 \neq 0$) birimli bir halka; M bir R-modül, 0 , M'nin sıfır elemanını ve I da boş olmayan bir indis kümesini gösterecektir.

Tanım 3.1: $\mu, \nu \in L^M$ olsun. $\mu + \nu, -\mu \in L^M$ aşağıdaki gibi tanımlanacaktır: Her $x \in M$ için,

$$(\mu + \nu)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge \nu(z) \mid y, z \in M, y + z = x \}, \quad (3.1)$$

$$(-\mu)(x) = \mu(-x). \quad (3.2)$$

$\mu + \nu$, μ ve ν 'nin "toplamı"; $-\mu$ de μ 'nün negatifi olarak adlandırılacaktır.

$\mu_i \in L^M$, $1 \leq i \leq n$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. "+" işleminde birleşme ve değişme özelliği olduğundan

$\mu_1 + \mu_2 + \dots + \mu_n$ toplamını düşünebiliriz ve bu toplamı $\sum_{i=1}^n \mu_i$ olarak yazılır.

$|I| > 1$ olmak üzere her $i \in I$ için $\mu_i \in L^M$ olsun. $\sum_{i \in I} \mu_i \in L^M$ işlemi her $x \in M$ için

$$\left(\sum_{i \in I} \mu_i \right)(x) = \vee \{ \bigwedge_{i \in I} \mu_i(x_i) \mid x_i \in M, i \in I, \sum x_i = x \} \quad (3.3)$$

şeklinde tanımlansın. Öyle ki $\sum x_i = \sum_{i \in I} x_i$ ve en fazla sonlu tane x_i θ 'ya eşit olmasın. $\sum_{i \in I} \mu_i$, μ_i 'lerin “zayıf toplamı” olarak adlandırılır.

Açıktır ki, $I = \{1, 2, \dots, n\}$ ve $n \geq 2$ için $\sum_{i \in I} \mu_i = \sum_{i=1}^n \mu_i$ 'dir.

Tanım 3.2: $r \in R$ ve $\mu \in L^M$ olmak üzere $r\mu \in L^M$ şöyle tanımlansın. $\forall x \in M$,

$$(r\mu)(x) = \vee \{ \mu(y) \mid y \in M, ry = x \}. \quad (3.4)$$

Burada $r\mu$, r ile μ 'nün “çarpımı” olarak adlandırılır.

Teorem 3.3: $r, s \in R$ ve $\mu, \nu, \xi, \mu_i \in L^M$, $i \in I$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır:

$$(1) 1\mu = \mu, (-1)\mu = -\mu;$$

$$(2) r1_{\{\emptyset\}} = 1_{\{\emptyset\}};$$

$$(3) \mu \subseteq \nu \Rightarrow r\mu \subseteq r\nu;$$

$$(4) r(s\mu) = (rs)\mu;$$

$$(5) r(\mu + \nu) = r\mu + r\nu;$$

$$(6) r\left(\bigcup_{i \in I} \mu_i\right) = \bigcup_{i \in I} r\mu_i;$$

$$(7) (r\mu)(rx) \geq \mu(x) \quad \forall x \in M;$$

$$(8) \xi(rx) \geq \mu(x) \quad \forall x \in M \Leftrightarrow r\mu \subseteq \xi;$$

$$(9) (r\mu + s\nu)(rx + sy) \geq \mu(x) \wedge \nu(y) \quad \forall x, y \in M;$$

$$(10) \xi(rx + sy) \geq \mu(x) \wedge \nu(y) \quad \forall x, y \in M \Leftrightarrow r\mu + s\nu \subseteq \xi.$$

İspat: (1)'den (6)'ya kadar aşikardır.

$$(7) (r\mu)(rx) = \vee \{ \mu(y) \mid y \in M, ry = rx \} \geq \mu(x) \quad \forall x \in M.$$

$$(8) \text{ Eğer } \xi(rx) \geq \mu(x) \quad \forall x \in M \text{ ise,}$$

$$(r\mu)(x) = \vee \{ \mu(y) \mid y \in M, ry = x \} \leq \vee \{ \xi(ry) \mid y \in M, ry = x \} = \xi(x) \quad \forall x \in M, \quad r\mu \subseteq \xi.$$

Eğer $r\mu \subseteq \xi$ ise, (7)'den $\xi(rx) \geq r\mu(rx) \geq \mu(x) \quad \forall x \in M$ olur.

(9) (7) ve '+' işleminin tanımından

$$(r\mu + sv)(rx + sy) \geq (r\mu)(rx) \wedge (sv)(sy) \geq \mu(x) \wedge v(y) \quad \forall x, y \in M$$

olur.

(10) Farz edelim ki, $\xi(rx + sy) \geq \mu(x) \wedge v(y) \quad \forall x, y \in M$ olsun. $\forall z \in M$ için,

$$\begin{aligned} (r\mu + sv)(x) &= \vee \left\{ (r\mu)(u) \wedge (sv)(v) \mid u, v \in M, u + v = x \right\} \\ &= \vee \left\{ \left(\vee \left\{ \mu(x) \mid x \in M, rx = u \right\} \right) \wedge \left(\vee \left\{ v(y) \mid y \in M, sy = v \right\} \right) \mid u, v \in M, u + v = x \right\} \\ &= \vee \left\{ \mu(x) \wedge v(y) \mid x, y \in M, rx + sy = x \right\} \\ &\leq \xi(x) \end{aligned}$$

olur. Buradan $r\mu + sv \subseteq \xi$ elde edilir.

Tersinden $r\mu + sv \subseteq \xi$ olduğunu varsayalım. $\forall x, y \in M$ için

$$\begin{aligned} \xi(rx + sy) &\geq (r\mu + sv)(rx + sy) \\ &\geq (r\mu)(rx) \wedge (sv)(sy) \\ &\geq \mu(x) \wedge v(y) \quad ((7)'den) \end{aligned}$$

olur.

Teorem 3.4: $r, s \in R$ ve $\mu \in L^M$ olsun.

$$(1) \quad r\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu(rx) \geq \mu(x) \quad \forall x \in M,$$

$$(2) \quad r\mu + s\mu \subseteq \mu \Leftrightarrow \mu(rx + sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in M.$$

İspat: Teorem 3.3'ün (8), (9) ve (10). maddelerinden elde edilir.

Teorem 3.5: Varsayalım ki, N bir R -modül ve $f, f: N \rightarrow M$ şeklinde tanımlı bir homomorfizma olsun. $r, s \in R$ ve $\mu, v \in L^M$ için,

$$(1) \quad f(\mu + v) = f(\mu) + f(v),$$

$$(2) f(r\mu) = rf(\mu),$$

$$(3) f(r\mu + sv) = rf(\mu) + sf(v).$$

İspat: (1) Kolaylıkla gösterilebilir.

$$(2) \forall y \in N \text{ için,}$$

$$\begin{aligned} f(r\mu)(y) &= \vee \{ (r\mu)(x) \mid x \in M, f(x) = y \} \\ &= \vee \{ \vee \{ \mu(u) \mid u \in M, ru = x \} \mid x \in M, f(x) = y \} \\ &= \vee \{ \mu(u) \mid u \in M, f(ru) = y \} \\ &= \vee \{ \mu(u) \mid u \in M, r(f(u)) = y \} \\ &= rf(\mu)(y). \end{aligned}$$

Buradan $f(r\mu) = rf(\mu)$ elde edilir.

(3) Bu ifade (1) ve (2)'nin sonucu olarak hemen çıkar.

Tanım 3.6: $\zeta \in L^R$ ve $\mu \in L^M$ olsun. $\forall x \in M$ için $\zeta \cdot \mu, \zeta \square \mu \in L^M$ aşağıdaki şekilde tanımlanır.

$$(\zeta \cdot \mu)(x) = \vee \{ \zeta(r) \wedge \mu(y) \mid r \in R, y \in M, ry = x \}, \quad (3.5)$$

$$(\zeta \square \mu)(x) = \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\zeta(r_i) \wedge \mu(x_i)) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\}. \quad (3.6)$$

Teorem 3.7: $\mu \in L^M$ olsun.

$$(1) \text{ Tüm } r \in R \text{ için, } 1_{\{r\}} \cdot \mu = r\mu,$$

$$(2) \text{ Tüm } r \in R \text{ ve } x \in M \text{ için,}$$

$$(1_{\{r\}} \square \mu)(x) = \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \mid x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, r \sum_{i=1}^n x_i = x \right\}.$$

Tanım 3.8: M 'nin bir L -alt modülü, $\mu \in L^M$ olmak üzere,

$$(M1) \mu(\theta) = 1$$

$$(M2) \mu(rx) \geq \mu(x) \quad \forall r \in R \text{ ve } x \in M,$$

$$(M3) \mu(x+y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall x, y \in M$$

şeklinde tanımlanır.

$L=[0,1]$ alındığında L -alt modülü bir “bulanık alt modülü” adını alır. Bundan sonraki kısım da L ile $[0,1]$ aralığını kabul edeceğiz.

Biz M 'nin L -alt modüllerinin tüm kümelerini $L(M)$ ile göstereceğiz.

R kendi üzerinde bir modül, bir önceki tanımdan μ 'nün R modülünün bir L -alt modülü olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün R halkasının bir L -ideali olmasıdır.

$\forall x \in M$ için $-1x = -x$ olduğundan (M2) koşulu $\forall x \in M$ için $\mu(-x) \geq \mu(x)$ 'i sağlar. Buradan da $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün M 'nin toplamsal grubunun bir L -alt grubu ve (M2) şartını sağlamasıdır.

Teorem 3.9: $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün (M1) ve aşağıdaki şartı sağlamasıdır:

$$(M4) \mu(rx+sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y) \quad \forall r,s \in R \text{ ve } x,y \in M.$$

İspat: Farzedelim $\mu \in L(M)$ olsun. Tanımdan dolayı μ (M1) koşulunu sağlar. μ aynı zamanda (M2) ve (M3) şartlarını da sağlar. Buradan da $\forall r,s \in R$ ve $x,y \in M$ için

$$\mu(rx+sy) \geq \mu(rx) \wedge \mu(sy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Böylece μ (M4) koşulunu da sağlamış olur.

Aksini varsayalım, μ (M1) ve (M4) şartlarını sağlamasın. $\forall r \in R$ ve $x \in M$ için

$$\mu(rx) = \mu(rx+r\theta) \geq \mu(x) \wedge \mu(\theta) = \mu(x)$$

ve $\forall x,y \in M$ için,

$$\mu(x+y) = \mu(1x+1y) \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Böylece μ (M2) ve (M3) koşullarını sağlar. Buradan da $\mu \in L(M)$ elde edilir.

Teorem 3.10: $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün M toplamsal grubunun bir L -alt grubu olması ve aşağıdaki şartı sağlamasıdır:

$$(M2)' \quad r\mu \subseteq \mu \quad \forall r \in R. \quad (3.7)$$

Teorem 3.11: $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$$(M1)' \quad 1_{\{\emptyset\}} \subseteq \mu;$$

$$(M2)' \quad r\mu \subseteq \mu \quad \forall r \in R,$$

$$(M3)' \quad \mu + \mu \subseteq \mu.$$

Teorem 3.12: $\mu \in L^M$ olsun. $\mu \in L(M)$ olması için gerek ve yeter koşul μ 'nün aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

$$(M1)' \quad 1_{\{\emptyset\}} \subseteq \mu;$$

$$(M4)' \quad r\mu + s\mu \subseteq \mu \quad \forall r, s \in R.$$

Biz şimdi L -alt modülleri ile ilgili bazı temel özelliklerden bahsedeceğiz. Eğer $\mu, v \in L^M$ ise, $\forall x \in M$ için $(\mu + v)(x) = \vee \{ \mu(y) \wedge v(z) \mid y, z \in M, x = y + z \}$ 'dir.

Teorem 3.13: $\mu, v \in L^M$ olsun. $\mu + v \in L(M)$ 'dir.

İspat: μ, M toplamsal grubunun L -alt grubu olmak üzere Teorem 3.3(5) ve Teorem 3.10'dan $\forall r \in R$ için

$$r(\mu + v) = r\mu + rv \subseteq \mu + v$$

olur. Buradan da $\mu + v \in L(M)$ elde edilir.

Teorem 3.14: $r_i \in R$ ve $\mu_i \in L(M)$, $1 \leq i \leq n$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. $\sum_{i=1}^n r_i \mu_i \in L(M)$ 'dir..

Teorem 3.15: $|I| > 1$ 'de her bir $i \in I$ için $\mu_i \in L(M)$ olsun. $\sum_{i \in I} \mu_i \in L(M)$ 'dir.

Teorem 3.16: $\zeta \in LI(R)$ ve $\mu \in L(M)$ olsun. $\zeta \square \mu \in L(M)$ 'dir.

İspat: $(\zeta \square \mu)(\theta) = 1$ olduğu açıktır. Şimdi $\forall r \in R, x \in M$ i

$$\begin{aligned}
 (\zeta \square \mu)(rx) &= \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\zeta(s_i) \wedge \mu(z_i)) \mid s_i \in R, z_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n s_i z_i = rx \right\} \\
 &\geq \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\zeta(r_i) \wedge \mu(x_i)) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n (r_i) x_i = rx \right\} \\
 &\geq \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n (\zeta(r_i) \wedge \mu(x_i)) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n r_i x_i = rx \right\} \\
 &= (\zeta \square \mu)(x).
 \end{aligned}$$

$\wedge$ işleminin $\vee$ işlemleri üzerine dağılma özelliğinden, $\forall x, y \in M$ için,

$$(\zeta \square \mu)(x + y) \geq (\zeta \square \mu)(x) \wedge (\zeta \square \mu)(y)$$

olur. Buradan da $\zeta \square \mu \in L(M)$ bulunur.

$M=R$ alınırsa bir önceki teoremden, eğer $\zeta, \mu \in LI(R)$ ise $\zeta \square \mu \in LI(R)$ 'dir.

4. BÖLÜM MODÜLLERİNİN L-ALT MODÜLLERİ

Biz bu bölümde bir bölüm modülünün L-alt modüllerinin yapısının iki metodundan bahsedeceğiz.

Teorem 4.1: A , M 'nin bir alt modülü ve $v \in L(M)$ olsun. $\forall x \in M$ için, $\xi \in L^{M/A}$ 'yi aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\xi([x]) = v \left\{ v(u) \mid u \in [x] \right\} \quad (4.1)$$

M/A , M 'nin A 'ya göre bölüm modülünü, $x+A$ 'da $[x]$ 'in kosetini ifade etmektedir. O zaman $\xi \in L(M/A)$ 'dir.

İspat: ξ M/A bölüm modülünün toplamsal grubunun bir L-alt grubudur. Şimdi $\forall r \in R$ ve $x \in M$ için,

$$\begin{aligned} \xi(r[x]) &= \xi([rx]) \\ &= v \left\{ v(v) \mid v \in [rx] \right\} \\ &= v \left\{ v(rx + y) \mid y \in A \right\} \\ &\geq v \left\{ v(rx + rz) \mid z \in A \right\} \\ &= v \left\{ v(r(x + z)) \mid z \in A \right\} \\ &\geq v \left\{ v(x + z) \mid z \in A \right\} \\ &= v \left\{ v(u) \mid u \in [x] \right\} \\ &= \xi([x]) \end{aligned}$$

olur. Buradan da $\xi \in L(M/A)$ elde edilir.

Biz şimdi Teorem 4.1'in özel bir durumunu göz önüne alacağız. L bir zincir ve $v \in L(M)$; $a \in L$ ve $A = v_a$ olsun. O zaman A M 'nin bir alt modülüdür. Böylece Teorem 4.1'den (4.1) eşitliği ile tanımlanan ξ , $\xi \in L(M/A)$ olur. $x \in M$ olsun ve $\xi([x])$ 'i göz önüne alalım. Eğer

$[x]=A$ ise, $\xi([x])=1$ 'dir. Eğer $[x] \neq A$ ise, $x \notin A$ ve buradan $v(x) < a$ olur. Böylece herhangi bir $y \in [x]$ için $z \in A$ vardır öyle ki $y = x + z$ 'dir. Buradan,

$$v(y) = v(x + z) \geq v(x) \wedge v(z) = v(x) \quad (4.2)$$

olur. Benzer biçimde $v(x) = v(y + (-z)) \geq v(y) \wedge v(-z) = v(y)$ 'dir. Sonuç olarak $v(x) = v(y)$ elde edilir. O halde $\forall x \in M$ için $\xi([x])$,

$$\xi([x]) = \begin{cases} 1 & v(x) \geq a \\ v(x) & \text{diğer durumlarda} \end{cases} \quad (4.3)$$

şeklinde verilebilir. $A = v_{[a]}$ olması durumu benzer şekilde elde edilir.

Biz şimdi Teorem 4.1'de tanımlanan ξ L -alt modülünün özelliklerini inceleyeceğiz.

$\mu, v \in L(M)$ olsun öyle ki $\mu \subseteq v$ ve L 'yi regüler(düzenli) kabul edelim. μ^* ve v^* 'ın her ikisinin de M 'nin altmodülü olduğu biliniyor. $\mu^* \subseteq v^*$ olduğu açıktır. Böylece μ^*, v^* 'ın bir alt modülüdür. Dahası açıktır ki $v|_{v^*} \in L(v^*)$ 'dir. Buradan Teorem 4.1'den eğer biz $\xi \in L^{v^*/\mu^*}$ 'ı $\forall x \in v^*$ için,

$$\xi([x]) = v \left\{ v(z) \mid z \in [x] \right\} \quad (4.4)$$

şeklinde tanımlarsak $[x]$, koset olarak $x + v^*$ 'ı ifade eder, o zaman $\xi \in L(v^*/\mu^*)$ 'dir. L -alt modül ξ , v 'nin μ 'ye göre "bölüm modülü" olarak adlandırılır ve v/μ ile gösterilir.

$\mu \in L(M)$; N bir R -modül ve $f: M \rightarrow N$ bir homomorfizma alırsak, $f(\mu) \in L(N)$ olur.

Tanım 4.2: M, N bir R -modül, $\mu \in L(M)$ ve $v \in L(N)$ olsun.

(1) Bir $f: M \rightarrow N$ homomorfizması; $f(\mu) \subseteq v$ ise μ, v içine zayıf homomorfizma olarak adlandırılır. Eğer μ, v içine f homomorfizması zayıf homomorfizma ise μ, v 'ye zayıfça homomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\sqsubseteq} v$ ya da basitçe $\mu \sqsubseteq v$ şeklinde yazılır.

(2) Bir $f : M \rightarrow N$ izomorfizması; $f(\mu) \subseteq v$ ise μ, v içine zayıf izomorfizma olarak adlandırılır. Eğer μ, v içine f izomorfizması zayıf izomorfizma ise μ, v 'ye zayıfça izomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\sqsubseteq} v$ ya da basitçe $\mu \sqsubseteq v$ şeklinde yazılır.

(3) Bir $f : M \rightarrow N$ homomorfizması; $f(\mu) = v$ ise μ 'den v 'ye bir homomorfizma olarak adlandırılır. Eğer f, μ 'den v 'ye bir homomorfizma ise μ, v 'ye homorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\approx} v$ ya da basitçe $\mu \approx v$ şeklinde yazılır.

(4) Bir $f : M \rightarrow N$ izomorfizması; $f(\mu) = v$ ise μ 'den v 'ye bir izomorfizma olarak adlandırılır. Eğer f, μ 'den v 'ye bir izomorfizma ise μ, v 'ye izomorfiktir denir ve $\mu \overset{f}{\equiv} v$ ya da basitçe $\mu \equiv v$ şeklinde yazılır.

Teorem 4.3: $\mu \subseteq v, \mu, v \in L(M)$ olsun. L regüler alınırsa $v|_{v^*} \approx v/\mu$ olur.

Teorem 4.4: $v \in L(M)$ olsun. N bir R -modül ve $\xi \in L(N)$ varsayalım öyle ki $v \approx \xi$ olsun. L 'yi de regüler alırsak bir $\mu \in L(M)$ vardır öyle ki $\mu \subseteq v$ ve $v/\mu \cong \xi|_{\xi^*}$ olur.

Teorem 4.5: $\mu, v \in L(M)$ olsun. L regüler ise $v/(\mu \cap v) \sqsubseteq (\mu + v)/\mu$ olur.

Teorem 4.6: $\mu, v, \xi \in L(M)$ olsun. L regüler ise $(\xi/\mu)/(v/\mu) \cong \xi/v$ olur.

Bir sonraki teorem bir bölüm modülünün L -alt modüllerinin yapısıyla ilgili diğer bir metodu gösterecek.

Teorem 4.7: R bir tamlık bölgesi; M bölünebilir bir R -modül ($r \in R \setminus \{0\}$ ve $x \in M \Rightarrow \exists y \in M$ vardır öyle ki $ry = x$); A, M 'nin bir asal alt modülü (A bir M 'nin alt modülü, $rx \in A, r \in R$ ve $x \in M \Rightarrow ya = 0$ ya da $x \in A$ 'dır.) kabul edelim. $v \in L(M)$ olsun. $\forall x \in M$ için $\eta \in L^{M/A}$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\eta([x]) = \begin{cases} 1 & [x] = A \\ \bigwedge_{u \in [x]} v(u) & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (4.5)$$

$\eta \in L(M/A)$ 'dır.

İspat: $\eta(A)=1$ olduğu açıktır. $r \in R$, $x \in M$ olsun ve $\eta(r[x])$ 'i göz önüne alalım. Eğer $r[x]=A$ ise, $\eta(r[x])=1 \geq \eta([x])$ 'dir. Eğer $r[x] \neq A$ ise $r \neq 0$ ve $[x] \neq A$ 'dır. M 'nin bölünebilir bir modül ve A 'nın da M 'nin bir asal alt modülü olduğundan $A = \{ rz \mid z \in A \}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned} \eta(r[x]) &= \eta([rx]) = \bigwedge_{v \in [rx]} v(v) = \bigwedge_{y \in A} v(rx + y) = \bigwedge_{z \in A} v(rx + rz) = \bigwedge_{z \in A} v(r(x + z)) \\ &\geq \bigwedge_{z \in A} v(x + z) = \bigwedge_{u \in [x]} v(u) = \eta([x]) \end{aligned} \quad (4.6)$$

olur.

Şimdi $x, y \in M$ olsun ve $\eta([x] + [y])$ 'yi göz önüne alalım. Eğer $[x] = A$ veya $[y] = A$ ya da $[x] + [y] = A$ ise, açıktır ki,

$$\eta([x] + [y]) \geq \eta([x]) \wedge \eta([y])$$

olur. $[x] \neq A$ ve $[y] \neq A$ ve $[x] + [y] \neq A$ kabul edelim.

$$\begin{aligned} \eta([x] + [y]) &= \bigwedge_{w \in [x] + [y]} v(w) \\ &= \bigwedge_{u', v' \in A} v((x + u') + (y + v')) \\ &\geq \bigwedge_{u', v' \in A} (v(x + u') \wedge v(y + v')) \\ &\geq \left(\bigwedge_{u' \in A} v(x + u') \right) \wedge \left(\bigwedge_{v' \in A} v(y + v') \right) \\ &= \left(\bigwedge_{u \in [x]} v(u) \right) \wedge \left(\bigwedge_{v \in [y]} v(v) \right) \\ &= \eta([x]) \wedge \eta([y]) \end{aligned}$$

olur. Buradan da $\eta \in L(M/A)$ elde edilir.

Teorem 4.7'den aşağıdaki sonuçları elde ettik:

Teorem 4.8: $v \in L(M)$ ve A , M 'nin bir alt modülü olsun. R 'yi bir cisim alalım. (4.5)

eşitliğiyle tanımlanan η L -alt modülü bir M/A bölüm modülünün bir L -alt modülüdür.

Teorem 4.9: $v \in L(M)$ olsun. Varsayalım ki, R bir tamlık bölgesi, M bölünebilir bir R -modül ve A da M 'nin burulma (torsion) alt modülü olsun $\left(A = \text{Tor}(M) = \left\{ x \mid x \in M, \exists r \in R \setminus \{0\} \text{ öyle ki } rx = 0 \right\} \right)$. (4.5) eşitliğiyle tanımlanan η L -alt modülü bir M/A bölüm modülünün bir L -alt modülüdür.

İspat: Varsayımımızdan dolayı biliyoruz ki A M 'nin bir asal alt modülüdür. Sonuç olarak istenilen Teorem 4.7'den elde edilmiş oldu.

5. L-ALT KÜMELERİ TARAFINDAN ÜRETİLEN L-ALT MODÜLLER

Teorem 5.1: $|I| > 1$ 'de her bir $i \in I$ için $\mu_i \in L(M)$ olsun. $\bigcap_{i \in I} \mu_i \in L(M)$ olur.

$\mu \in L^M$ olsun. Teorem 5.1'den, $\bigcap \{ \nu \mid \mu \subseteq \nu, \nu \in L(M) \}$ M 'nin bir L-alt modülüdür, L-alt küme μ tarafından üretilmiş L-alt modül olarak adlandırılır. Biz L-alt modül $\langle \mu \rangle$ 'yi aşağıdaki şekilde göstereceğiz:

$$\langle \mu \rangle = \bigcap \{ \nu \mid \mu \subseteq \nu, \nu \in L(M) \} \quad (5.1)$$

$\xi \in L(M)$ olsun. Eğer bazı $\mu \in L^M$ için $\xi = \langle \mu \rangle$ ise ξ , μ 'nün L-alt kümesi tarafından üretilmiş olarak adlandırılır.

$\mu, \nu \in L^M$ olsun. Aşağıdakiler kolayca sağlanır:

$$(1) \mu \in L(M) \Leftrightarrow \langle \mu \rangle = \mu$$

$$(2) \mu \subseteq \nu \Rightarrow \langle \mu \rangle \subseteq \langle \nu \rangle$$

$$(3) \langle \mu|_N \rangle \subseteq \langle \mu \rangle|_N \in L(N)$$

Burada N , M 'nin alt modülü ve $\mu|_N$ ve $\langle \mu \rangle|_N$ sırasıyla μ ve $\langle \mu \rangle$ 'nün N 'ye kısıtlanmasıdır. Dahası, A , M 'nin boş olmayan bir alt kümesi ve $\langle A \rangle$, A tarafından üretilen bir alt modül olmak üzere $\langle 1_A \rangle = 1_{\langle A \rangle}$ 'dir.

Teorem 5.2: $|I| > 1$ 'de her bir $i \in I$ için $\mu_i \in L(M)$ olsun. $\langle \bigcup_{i \in I} \mu_i \rangle = \sum_{i \in I} \mu_i$ 'dir.

İspat: Şimdi $\sum_{i \in I} \mu_i$, M 'nin toplamsal grubunun en küçük L-alt grubudur. Bütün μ_i 'leri içine alır. Böylece $\sum_{i \in I} \mu_i \in L(M)$ 'dir. Buradan $\langle \bigcup_{i \in I} \mu_i \rangle = \sum_{i \in I} \mu_i$ olur.

Teorem 5.3: $\mu \in L^M$ olsun. $\xi \in L^M$ 'yi aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & x = \theta \\ \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\} & \text{diğer durumda} \end{cases} \quad (5.2)$$

$\forall x \in M, \xi = 1_{\{\theta\}} \cup (1_R \square \mu)$. O zaman $\langle \mu \rangle = \xi$ 'dir.

İspat: $\mu \subseteq \xi$ olduğu açıktır. Tanımdan $\xi(\theta) = 1$ 'dir. $r \in R$ ve $x \in M$ olsun. Eğer $rx = \theta$ ise, $\xi(rx) = 1 \geq \xi(x)$ olur. $rx \neq \theta$ kabul edelim. $x \neq \theta$ ve

$$\begin{aligned} \xi(rx) &= \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n r_i x_i = rx \right\} \\ &\geq \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n r_i x_i = rx \right\} \\ &= \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, r \left(\sum_{i=1}^n r_i x_i \right) = rx \right\} \\ &\geq \vee \left\{ \bigwedge_{i=1}^n \mu(x_i) \mid r_i \in R, x_i \in M, 1 \leq i \leq n, n \in \square, \sum_{i=1}^n r_i x_i = x \right\} \\ &= \xi(x) \end{aligned}$$

olur.

Buradan $\forall r \in R$ ve $x \in M$ için $\xi(rx) \geq \xi(x)$ olur. $x, y \in M$ olsun. Eğer $x, y, x+y$ 'lerden bir tanesi θ 'a eşit ise $\xi(x+y) \geq \xi(x) \wedge \xi(y)$ olur. Eğer $x, y, x+y$ 'lerden hiçbirisi θ 'a eşit değilse $\vee$ işleminin $\wedge$ işlemi üzerine dağılma özelliğinden $\xi(x+y) \geq \xi(x) \wedge \xi(y)$ olduğunu kolaylıkla gösterebiliriz. Böylece $\forall x, y \in M$ için $\xi(x+y) \geq \xi(x) \wedge \xi(y)$ olur. Buradan da $\xi \in L(M)$ bulunur.

Son olarak $\eta \in L(M)$, $\mu \subseteq \eta$ olsun. Teorem 3.9'dan $\xi \subseteq \eta$ bulunur. Buradan da $\langle \mu \rangle = \xi$ elde edilir.

Teorem 5.4: $x \in M$ ve $a \in L$ olsun.

$$\langle x_a \rangle = 1_{\{\theta\}} \cup \left(\bigcup \left\{ (rx)_a \mid r \in R \right\} \right) \quad (5.3)$$

Özellikle, $x = \theta$ ya da $a = 0$ alındığında $\langle x_a \rangle = 1_{\{\theta\}}$ olur.

İspat: (4.2) eşitliğinden elde edilir.

Teorem 5.5: $\mu \in L^M$ olsun ve $n \in \square$ 'de $\mu^* \setminus \{\theta\} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ olduğunu kabul edelim.

$1 \leq i \leq n$ için $a_i = \mu(x_i)$ ve $\mu_i = (x_i)_{a_i}$ olsun.

$$v = \cup \left\{ \sum_{j=1}^m r_{i_j} \mu_{i_j} \mid r_{i_j} \in \mathbf{R}, 1 \leq j \leq m, 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n \right\} \quad (5.4)$$

için $\langle \mu \rangle = 1_{\{\emptyset\}} \cup v$ 'dır.

İspat: Teorem 5.3'ün bir sonucu olarak kolaylıkla gösterilebilir.

6. SERBEST L-ALT MODÜLLER

Tanım 6.1: M , $f : B \rightarrow M$ fonksiyonu ile belirli bir R -serbest modül olsun. β , B 'nin L -alt kümesi ve ξ , M 'nin bir L -alt modülü olsun. ξ 'ye β ile belirli "serbest" dir denir, eğer $f(B)$ 'de $f(\beta) = \xi$ ve her Y R -modülü, Y 'nin η L -alt modülü ile birlikte $g : B \rightarrow Y$ ve $g(B)$ 'de $g(\beta) = \eta$ olmak üzere M 'den Y 'nin içine tek bir h homomorfizması vardır öyle ki, $g = h \circ f$ ve $h(\xi) \subseteq \eta$ koşulları sağlanır.

Teorem 6.2: β , bir B kümesinin bir L -alt kümesi olsun. Bir M R -serbest modülünde bir ξ serbest L -alt modülü vardır öyle ki aşağıdaki özellikler sağlanır:

- (1) Eğer $|\beta(B)|$ sonsuz ise $|\xi(M)| = |\beta(B)|$ 'dir.
- (2) Eğer $|\beta(B)|$ sonlu ise $|\xi(M)| \leq 2^{|\beta(B)|}$ 'dir.
- (3) Eğer L bir zincir ise $|\xi(M)| \leq |\beta(B)| + 1$ 'dir.

İspat: M , bir $f : B \rightarrow M$ fonksiyonu ile belirli B kümesi üzerinde bir R -serbest modülü olsun. f 'yi içine fonksiyon ve $f(B)$ 'yi M için bir taban olarak varsayabiliriz. $\forall x \in M$ $x \neq 0$, x tek bir temsile sahiptir.

$$x = \sum_{i=1}^k r_i f(z_i), \quad (6.1)$$

$0 \neq r_i \in R$, $z_i \in B$, $i = 1, 2, \dots, k$; $f(z_i) \neq f(z_j)$ eğer $i \neq j$. M 'nin ξ L -altkümesini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\xi(x) = \begin{cases} 1 & \text{eğer } x = 0 \\ \bigwedge_{i=1}^k \beta(z_i) & \text{eğer } x = \sum_{i=1}^k r_i f(z_i) \neq 0 \end{cases} \quad (6.2)$$

ξ , M 'nin L -alt modülüdür.

Şimdi $\forall x \in M$, $f(\beta)(x) = \vee \{ \beta(z) \mid f(z) = x \}$ olsun. Böylece (6.2) denkleminde,

$$f(\beta)(x) = \begin{cases} 0 & \text{eğer } x \notin f(B) \\ \xi(x) & \text{eğer } x \in f(B) \end{cases} \quad (6.3)$$

Böylece $f(\beta) \subseteq \xi$ olur. Gerçekte, $f(B)$ 'de $f(\beta) = \xi$ 'dir.

Y bir R -modül, $g: B \rightarrow Y$ bir fonksiyon ve η bir Y 'nin L -alt modülü öyle ki $g(B)$ 'de $g(\beta) = \eta$ 'dir. M serbest olduğundan bir $h: M \rightarrow Y$ homomorfizması vardır öyle ki $h \circ f = g$ 'dir. Biz şimdi $h(\xi) \subseteq \eta$ olduğunu gösterelim. $y \in Y$ olsun. Eğer $y = \theta$ ise veya eğer $h^{-1}(y) = \emptyset$ ise $h(\xi)(y) \leq \eta(y)$ olduğu açıktır. Varsayalım ki $y \neq \theta$ ve $h^{-1}(y) \neq \emptyset$ olsun. $h(x) = y$ olacak şekilde $x \in M$ olsun. x , (6.1) eşitliğinde tek bir temsile sahiptir. $h \circ f = g$ 'den $y = h(x) = \sum_{i=1}^k r_i g(z_i)$ eşitliğini elde ederiz. $g(\beta) \subseteq \eta$ 'den $\eta \circ g \supseteq \beta$ 'dir. Böylece $\eta(y) \geq \wedge_{i=1}^k (\eta \circ g)(z_i) \geq \wedge_{i=1}^k \beta(z_i) = \xi(x)$ olur. Buradan da $\eta \supseteq h(\xi)$ elde edilir.

7. ÇÖZEN BÖLÜMLER

X , M 'nin bir alt kümesi ve $\langle X \rangle$, M 'nin X tarafından üretilen alt modülü olsun. Herhangi bir $x \in M$ için $\langle x \rangle$, M 'nin $\{x\}$ tarafından üretilen alt modülüdür. M 'nin herhangi bir N alt modülü için

$$N : M = \{ r \mid r \in R, rM \subseteq N \} \quad (7.1)$$

ve

$$\sqrt{N : M} = \{ r \mid r \in R, \exists m \in \square \text{ öyle ki } r^m M \subseteq N \} \quad (7.2)$$

eşitliklerine sahibiz.

Tanım 7.1: $\mu, \nu \in L^M$ ve $\zeta \in L^R$ için çözen bölümler $\mu : \nu \in L^R$ ve $\mu : \zeta \in L^M$ için aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\mu : \nu = \cup \{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \cdot \nu \subseteq \mu \} \quad (7.3)$$

$$\mu : \zeta = \cup \{ \xi \mid \xi \in L^M, \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \} \quad (7.4)$$

Teorem 7.2: $\mu, \nu \in L^M$ ve $\zeta \in L^R$ olsun.

$$(1) \mu : \nu = \cup \{ r_a \mid r \in R, a \in L, r_a \cdot \nu \subseteq \mu \}$$

$$(2) \mu : \zeta = \cup \{ x_a \mid x \in M, a \in L, \zeta \cdot x_a \subseteq \mu \}$$

olur.

İspat:

(1) Tanım 7.1'den,

$$\cup \{ r_a \mid r \in R, a \in L, r_a \cdot \nu \subseteq \mu \} \subseteq \mu : \nu$$

olduğu açıktır. $\eta \in L^R$, $\eta \cdot \nu \subseteq \mu$ ve $r \in R$, $\eta(r) = a$ olsun. $\forall x \in M$ için,

$$(r_a \cdot \nu)(x) = \vee \{ r_a(s) \wedge \nu(y) \mid s \in R, y \in M, s = x \}$$

$$= \vee \{ \eta(r) \wedge (y) \mid y \in M, ry = x \}$$

$$\leq (\eta \cdot \nu)(x)$$

$$\leq \mu(x)$$

Böylece $r_a \cdot v \subseteq \mu$ ve bundan dolayı

$$\mu : v \subseteq \cup \{ r_a \mid r \in R, a \in L, r_a \cdot v \subseteq \mu \}$$

olur. Böylelikle,

$$\mu : v = \cup \{ r_a \mid r \in R, a \in L, r_a \cdot v \subseteq \mu \}$$

elde edilir.

(2) (1)'e benzer şekilde yapılır.

Teorem 7.3: $\mu, v \in L^M$ ve $\zeta \in L^R$ olsun.

$$(1) (\mu : v) \cdot v \subseteq \mu,$$

$$(2) \zeta \cdot (\mu : \zeta) \subseteq \mu,$$

$$(3) \zeta \cdot v \subseteq \mu \Leftrightarrow \zeta \subseteq \mu : v \Leftrightarrow v \subseteq \mu : \zeta$$

dir.

İspat:

(1) Tanım 7.1'den, $\forall x \in M$ için,

$$\begin{aligned} [(\mu : v) \cdot v](x) &= v \{ (\mu : v)(r) \wedge v(y) \mid r \in R, y \in M, ry = x \} \\ &= v \left\{ \left(\bigvee \{ \eta(r) \mid \eta \in L^R, \eta \cdot v \subseteq \mu \} \right) \wedge v(y) \mid r \in R, y \in M, ry = x \right\} \\ &= v \left\{ \eta(r) \wedge v(y) \mid \eta \in L^R, r \in R, y \in M, \eta \cdot v \subseteq \mu, ry = x \right\} \\ &\leq v \left\{ (\eta \cdot v)(ry) \mid \eta \in L^R, r \in R, y \in M, \eta \cdot v \subseteq \mu, ry = x \right\} \\ &\leq v \left\{ \mu(x) \mid \eta \in L^R, r \in R, y \in M, \eta \cdot v \subseteq \mu, ry = x \right\} \\ &= \mu(x) \end{aligned}$$

elde edilir.

(2) (1)'in ispatına benzer şekilde yapılır.

(3) (1) ve (2)'nin sonucu olarak çıkar.

Teorem 7.4: Eğer μ_i ($i \in I$), $\nu \in L^M$ ve $\zeta \in L^R$ ise,

$$(1) \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) : \nu = \bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu);$$

$$(2) \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) : \zeta = \bigcap_{i \in I} (\mu_i : \zeta)$$

olur.

İspat:

(1) Tanım 7.1'den,

$$\begin{aligned} \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) : \nu &= \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \cdot \nu \subseteq \bigcap_{i \in I} \mu_i \right\} \\ &= \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \cdot \nu \subseteq \mu_i \ \forall i \in I \right\} \\ &= \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \subseteq \mu_i : \nu \ \forall i \in I \right\} \\ &= \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) \right\} \\ &\subseteq \bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) \end{aligned}$$

olur. Teorem 7.3'den, $\forall x \in M$ için,

$$\begin{aligned} \left(\left(\bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) \right) \cdot \nu \right)(x) &= \vee \left\{ \left(\bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) \right)(r) \wedge \nu(y) \mid r \in R, y \in M, ry = x \right\} \\ &\leq \vee \left\{ \bigwedge_{i \in I} ((\mu_i : \nu))(r) \wedge \nu(y) \mid r \in R, y \in M, ry = x \right\} \\ &\leq \vee \left\{ \bigwedge_{i \in I} ((\mu_i : \nu) \cdot \nu)(ry) \mid r \in R, y \in M, ry = x \right\} \\ &\leq \vee \left\{ \bigwedge_{i \in I} \mu_i(ry) \mid r \in R, y \in M, ry = x \right\} \\ &= \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right)(x) \end{aligned}$$

dir. Böylece

$$\left(\bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) \right) \cdot \nu \subseteq \bigcap_{i \in I} \mu_i$$

ve

$$\bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) \subseteq \left(\bigcap_{i \in I} \mu_i \right) : \nu$$

elde edilir. Buradan da

$$\bigcap_{i \in I} (\mu_i : \nu) = (\bigcap_{i \in I} \mu_i) : \nu$$

bulunur.

(2) (1)'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 7.5: $\mu, \nu \in L^M$ ve $\zeta \in L^R$ olsun.

(1) Eğer $\mu \in L(M)$ ise, $\mu : \nu = \bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \}$ 'dir.

(2) Eğer $\zeta \in LI(R)$ ise, $\mu : \zeta = \bigcup \{ \xi \mid \xi \in L(M), \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \}$ 'dir.

İspat:

(1) $\bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \} \subseteq \mu : \nu$ olduğu açıktır. $r \in R, a \in L, r_a \cdot \nu \subseteq \mu$ ve $\eta = \langle r_a \rangle$ olsun. $\forall x \in M$ için,

$$\langle r_a \rangle \cdot \nu = (1_{\{0\}} \cup a_{\langle r \rangle}) \cdot \nu$$

$$= 1_{\{0\}} \cdot \nu \cup a_{\langle r \rangle} \cdot \nu$$

$$\subseteq 1_{\{0\}} \cup a_{\langle r \rangle} \cdot \nu,$$

$$(a_{\langle r \rangle} \cdot \nu)(x) = \vee \{ a_{\langle r \rangle}(s) \wedge \nu(y) \mid s \in R, y \in M, sy = x \}$$

$$= \vee \{ a \wedge \nu(y) \mid s \in \langle r \rangle, y \in M, sy = x \}$$

$$\leq \vee \{ (r_a \cdot \nu)(ry) \mid t \in R, y \in M, t(ry) = x \}$$

$$\leq \vee \{ \mu(ry) \mid t \in R, y \in M, t(ry) = x \}$$

$$\leq \vee \{ \mu(t(ry)) \mid t \in R, y \in M, t(ry) = x \}$$

$$= \mu(x)$$

olur. Böylece $a_{\langle r \rangle} \cdot \nu \subseteq 1_{\{0\}} \cup \mu = \mu$ ve

$$\bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \} \supseteq \bigcup \{ r_a \mid r \in R, a \in L, r_a \cdot \nu \subseteq \mu \}$$

$$= \mu : \nu$$

olur. Buradan $\mu : \nu = \bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \} \subseteq \mu : \nu$ elde edilir.

(2) $\bigcup \{ \xi \mid \xi \in L(M), \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \} \subseteq \mu : \zeta$ olduğu açıktır. $x \in M, a \in L, \zeta \cdot x_a \subseteq \mu$ ve $\xi = \langle x_a \rangle$ olsun. Teorem 5.4'den, $\forall r \in R$ ve $y \in M$ için,

$$\begin{aligned} \zeta \cdot \langle x_a \rangle &= \zeta \cdot \left(1_{\{\emptyset\}} \cup \left(\bigcup \{ (rx)_a \mid r \in R \} \right) \right) \\ &= \zeta \cdot 1_{\{\emptyset\}} \cup \left(\bigcup \{ \zeta \cdot (rx)_a \mid r \in R \} \right) \\ &= 1_{\{\emptyset\}} \cup \left(\bigcup \{ \zeta \cdot (rx)_a \mid r \in R \} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (\zeta \cdot (rx)_a)(y) &= \vee \{ \zeta(s) \wedge (rx)_a(z) \mid s \in R, z \in M, sz = y \} \\ &= \vee \{ \zeta(s) \wedge a \mid s \in R, srx = y \} \\ &\leq \vee \{ \zeta(t) \wedge a \mid t \in R, tx = y \} \\ &= (\zeta \cdot x_a)(y) \end{aligned}$$

olur. Böylece $\forall r \in R$ için $\zeta \cdot (rx)_a \subseteq \zeta \cdot x_a$ ve buradan

$$\bigcup \{ \zeta \cdot (rx)_a \mid r \in R \} \subseteq \zeta \cdot x_a \subseteq \mu_i$$

$$\zeta \cdot \langle x_a \rangle \subseteq \mu$$

elde edilir.

$\langle x_a \rangle \in L(M)$ ve Teorem 7.2'den

$$\bigcup \{ \xi \mid \xi \in L(M), \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \} \supseteq \mu : \zeta$$

buradan da

$$\mu : \zeta = \bigcup \{ \xi \mid \xi \in L(M), \zeta \cdot \xi \subseteq \mu \}$$

bulunur.

Teorem 7.6: $\mu \in L(M), v \in L^M$ ve $\zeta \in LI(R)$ olsun. $\mu : v \in LI(R)$ ve $\mu : \zeta \in L(M)$ olur.

İspat: $1_{\{\emptyset\}} \cdot v \subseteq 1_{\{\emptyset\}} \subseteq \mu$ 'den $1_{\{\emptyset\}} \subseteq \mu : v$ olur. Teorem 7.5'den, $\forall r_1, r_2 \in R$ için,

$$\begin{aligned}
(\mu : \nu)(r_1) \wedge (\mu : \nu)(r_2) &= \left(\bigvee \left\{ \eta_1(r_1) \mid \eta_1 \in LI(R), \eta_1 \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \right) \\
&\quad \wedge \left(\bigvee \left\{ \eta_2(r_2) \mid \eta_2 \in LI(R), \eta_2 \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \right) \\
&= \bigvee \left\{ \eta_1(r_1) \eta_2(r_2) \mid \eta_1, \eta_2 \in LI(R), \eta_1 \cdot \nu \subseteq \mu, \eta_2 \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \\
&\leq \bigvee \left\{ (\eta_1 + \eta_2)(r_1) \wedge (\eta_1 + \eta_2)(r_2) \mid \eta_1, \eta_2 \in LI(R), \eta_1 \cdot \nu \subseteq \mu, \eta_2 \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \\
&\leq \bigvee \left\{ (\eta_1 + \eta_2)(r_1 - r_2) \mid \eta_1, \eta_2 \in LI(R), \right. \\
&\quad \left. (\eta_1 + \eta_2) \cdot \nu \subseteq \eta_1 \cdot \nu + \eta_2 \cdot \nu \subseteq \mu + \mu \subseteq \mu \right\} \\
&\leq \bigvee \left\{ \eta(r_1 - r_2) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \\
&= (\mu : \nu)(r_1 - r_2)
\end{aligned}$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir.

Şimdi $\forall r, s \in R$ için,

$$\begin{aligned}
(\mu : \nu)(sr) &= \bigvee \left\{ \eta(sr) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \\
&\geq \bigvee \left\{ \eta(r) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \right\} \\
&= (\mu : \nu)(r)
\end{aligned}$$

olur. Buradan $\mu : \nu \in LI(R)$ elde edilir.

$\mu : \zeta \in LI(M)$ olduğu benzer şekilde gösterebilir.

$\mu, \nu \in L(M)$ ve $\zeta \in LI(R)$ olsun. $\mu : \zeta$, μ ve ζ 'nin çözen bölüm L-alt modülü; $\mu : \nu$ 'ye de μ ve ν 'nin çözen bölüm L-ideali olarak adlandırılır.

Teorem 7.7: $\mu \in L^M$ olsun.

(1) Eğer $v_i \in L^M$, $i \in I$ ise, $\mu : \left(\bigcup_{i \in I} v_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\mu : v_i)$ 'dir.

(2) Eğer $\zeta_i \in L^R$, $i \in I$ ise, $\mu : \left(\bigcup_{i \in I} \zeta_i \right) = \bigcap_{i \in I} (\mu : \zeta_i)$ 'dir.

İspat:

(1) Tanım 7.1'den, $\forall i \in I$ için,

$$\begin{aligned}
\mu : (\bigcup_{i \in I} v_i) &= \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \cdot (\bigcup_{i \in I} v_i) \subseteq \mu \right\} \\
&= \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \bigcup_{i \in I} (\eta \cdot v_i) \subseteq \mu \right\} \\
&\subseteq \bigcup \left\{ \eta \mid \eta \in L^R, \eta \cdot v_i \subseteq \mu \right\} \\
&= \mu : v_i
\end{aligned}$$

dir. Buradan $\mu : (\bigcup_{i \in I} v_i) \subseteq \bigcap_{i \in I} (\mu : v_i)$ olur. Teorem 7.3'den,

$$\begin{aligned}
(\bigcap_{i \in I} (\mu : v_i)) \cdot (\bigcup_{j \in I} v_j) &= \bigcup_{j \in I} ((\bigcap_{i \in I} (\mu : v_i)) \cdot v_j) \\
&\subseteq \bigcup_{j \in I} ((\mu : v_j) \cdot v_j) \\
&\subseteq \bigcup_{j \in I} \mu \\
&= \mu
\end{aligned}$$

bulunur. Böylece, $(\bigcap_{i \in I} (\mu : v_i)) \subseteq \mu : (\bigcup_{i \in I} v_i)$ olur. Buradan da $\mu : (\bigcup_{i \in I} v_i) = (\bigcap_{i \in I} (\mu : v_i))$ elde edilir.

(2) (1)'in ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 7.8: N , M 'nin bir alt modülü ve $c \in L$ olsun.

$$(1_N \cup c_M) : 1_M = 1_{N:M} \cup c_R \quad (7.5)$$

dır.

İspat: Eğer $r \notin N : M$ ise, $rM \not\subseteq N$ ve $y \in M$ vardır öyle ki $ry \notin N$ 'dir. Böylece

$$\begin{aligned}
[(1_N \cup c_M) : 1_M](r) &= \bigvee \left\{ \eta(r) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq 1_N \cup c_M \right\} \\
&= \bigvee \left\{ \eta(r) \wedge 1_M(y) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq 1_N \cup c_M \right\} \\
&\leq \bigvee \left\{ (1_N \vee c_M)(ry) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq 1_N \cup c_M \right\} \\
&= c
\end{aligned}$$

olur. Buradan $(1_N \cup c_M) : 1_M \subseteq 1_{N:M} \cup c_R$ 'dir. Eğer $x \notin N$ ise,

$$\begin{aligned} \left[(1_{N:M} \cup c_R) \cdot 1_M \right] (x) &= \vee \left\{ (1_N \cup c_M)(r) \wedge 1_M(z) \mid r \in R, z \in M, rz = x \right\} \\ &= c \end{aligned}$$

olur. Böylece $(1_{N:M} \cup c_R) \cdot 1_M \subseteq 1_N \cup c_M$ ve böylece $1_{N:M} \cup c_R \subseteq (1_N \cup c_M) : 1_M$ 'dir. Buradan $(1_N \cup c_M) : 1_M = 1_{N:M} \cup c_R$ elde edilir.

8. ASALLANABİLİR L-ALTMODÜLLER

Tanım 8.1: M 'nin L -alt modülü μ , eğer aşağıdaki şartı sağlarsa asallanabilir olarak adlandırılır:

$$\zeta \cdot v \subseteq \mu, \zeta \in LI(R), v \in L(M) \Rightarrow \zeta \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M) \text{ ya da } v \subseteq \mu. \quad (8.1)$$

Teorem 8.2: Varsayalım ki, $M=R$ olsun. Bir L -alt modülünün asallanabilir L -alt modülü olması için gerek ve yeter koşul R 'nin asallanabilir L -ideali olmasıdır.

İspat: μ , M 'nin L -alt modülü olsun. Teorem 7.5'den,

$$\begin{aligned} \mathfrak{R}(\mu : 1_M) &= \mathfrak{R}(\mu : 1_R) \\ &= \mathfrak{R}\left(\bigvee \left\{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_R \subseteq \mu \right\}\right) \\ &= \mathfrak{R}\left(\bigvee \left\{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \subseteq \mu \right\}\right) \\ &= \mathfrak{R}(\mu). \end{aligned}$$

Tanım 8.1'den istenilen sonuç elde edilir.

Bir asallanabilir L -alt modül $M=R$ olduğunda $\mathfrak{R}$ - asallanabilir L -idealdir, $\mathfrak{R}$ - asallanabilir L -idealleri için geçerli özdeşlikler aynı zamanda asallanabilir L -idealleri için de sağlanır.

Teorem 8.3: $\mu \in L^M$ olsun. μ 'nün M 'nin asallanabilir bir L -alt modülü olması için gerek ve yeter koşul, $\mu_* = \{x \mid x \in M, \mu(x) = 1\}$ M 'nin asallanabilir alt modülü ve L 'nin asal elemanı c için

$$\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M \quad (8.2)$$

olmasıdır.

İspat: μ , M 'nin asallanabilir L -alt modülü olsun. Şimdi μ_* M 'nin alt modülüdür. Böylece $1 \in \mu(M)$ ve $|\mu(M)| \geq 2$ olur. $x, y \in M \setminus \mu_*$ ve $\mu(x) = c$ olsun. $\forall r \in R$ için $\mu(rx) \geq \mu(x) = c$ 'den $\forall r \in R$ için $(rx)_c \subseteq \mu$ 'dir. Böylece Teorem 5.4'den,

$$\langle x_c \rangle = 1_{\{0\}} \cup \left(\bigcup \left\{ (rx)_c \mid r \in R \right\} \right) \subseteq \mu$$

olur. Şimdi $v = 1_{\langle x \rangle}$ ve $\zeta = 1_{\{0\}} \cup c_R$ olsun. $\zeta \in LI(R)$ ve $v \in L(M)$ olur. $1_{\{0\}} \cdot 1_{\langle x \rangle} = 1_{\{0\}}$ ve $c_R \cdot 1_{\langle x \rangle} = c_{\langle x \rangle}$ olduğu açıktır. Buradan,

$$\begin{aligned} (1_{\{0\}} \cup c_R) \cdot v &= 1_{\{0\}} \cdot 1_{\langle x \rangle} \cup c_R \cdot 1_{\langle x \rangle} \\ &= 1_{\{0\}} \cup c_{\langle x \rangle} \\ &= \langle x_c \rangle \\ &\subseteq \mu \end{aligned}$$

bulunur. Fakat μ , M 'nin asallanabilir L -alt modülü ve $1_{\langle x \rangle} \not\subseteq \mu$ olduğundan, $\zeta = 1_{\{0\}} \cup c_R \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ olur. Böylece $\forall r \in R \setminus \{0\}$ için,

$$\begin{aligned} \zeta(r) &= c \\ &\leq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)(r) \\ &= \vee_{n \in \mathbb{N}} (\mu : 1_M)(r^n) \\ &= \vee_{n \in \mathbb{N}} \left(\vee \left\{ \eta(r^n) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \right\} \right) \\ &= \vee \left\{ \mathfrak{R}(\eta)(r) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \right\} \end{aligned}$$

ve özellikle,

$$\begin{aligned} \mu(x) &= c \\ &= \zeta(e) \\ &\leq \vee \left\{ \mathfrak{R}(\eta)(e) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \right\} \\ &= \vee \left\{ \eta(e) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \right\} \\ &= \vee \left\{ \eta(e) \wedge 1_M(y) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \right\} \\ &\leq \vee \left\{ (\eta \cdot 1_M)(y) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \right\} \end{aligned}$$

$$\leq \mu(y)$$

olur. Benzer şekilde $\mu(y) \leq \mu(x)$ 'dir. Buradan $\mu(x) = \mu(y) = c$ bulunur. Böylece

$|\mu(M)| = 2$ ve buradan $\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M$ olur. Sonra μ_* 'ın M 'nin asallanabilir alt modülü olduğunu gösterelim. $r \in R$, $x \in M$ ve $rx \in \mu_*$ olsun. $1_{\langle x \rangle} \in L(M)$, $1_{\langle r \rangle} \in LI(R)$, $\langle r \rangle \langle x \rangle \subseteq \mu_*$ ve

$$1_{\langle x \rangle} \cdot 1_{\langle r \rangle} = 1_{\langle x \rangle \langle r \rangle} \subseteq 1_{\mu_*} \subseteq \mu$$

olur. Böylece ya $1_{\langle r \rangle} \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ ya da $1_{\langle x \rangle} \subseteq \mu$ olur. $1_{\langle x \rangle} \subseteq \mu$ olduğu göz önüne alınırsa $\langle x \rangle \subseteq \mu_*$ ve buradan $x \in \mu_*$ 'dır. Eğer $1_{\langle r \rangle} \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ ise Teorem 7.8'den,

$$1_{\langle r \rangle} \subseteq \mathfrak{R}(1_{\mu_* : M} \cup c_R) = 1_{\sqrt{\mu_* : M}} \cup c_R$$

elde ederiz. Buradan $\langle r \rangle \subseteq \sqrt{\mu_* : M}$ olur ve $r^m \in \mu_* : M$ için $m \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $r^m M \subseteq \mu_*$ 'dır. Buradan μ_* 'ın M 'nin asallanabilir alt modülü olduğu sonucu çıkar. Şimdi c 'nin L 'nin bir asal elemanı olduğunu gösterelim. Varsayalım ki c L 'nin asal elemanı olmasın. $a \not\leq c$, $b \not\leq c$ ve $a \wedge b \leq c$ olacak şekilde $a, b \in L$ vardır. Böylece $1_{\{0\}} \cup b_m \not\subseteq \mu$ ve

$$(1_{\{0\}} \cup a_R)(1) = a \not\leq c = \mathfrak{R}(\mu : 1_M)(1)$$

ve buradan $1_{\{0\}} \cup a_R \not\subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ olur. Fakat

$$\begin{aligned} (1_{\{0\}} \cup a_R)(1_{\{0\}} \cup b_M) &= 1_{\{0\}} \cdot 1_{\{0\}} \cup 1_{\{0\}} \cdot b_M \cup a_R \cdot 1_{\{0\}} \cup a_R \cdot b_M \\ &\subseteq 1_{\{0\}} \cup c_M \\ &\subseteq \mu \end{aligned}$$

dir. μ , M 'nin asallanabilir L -alt modülü olduğundan bu bir çelişkidir. Buradan, c L 'de bir asal elemandır.

Bunun tersine, μ_* M 'nin asallanabilir alt modülü ve c L 'de asal eleman olmak üzere $\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M$ olduğunu varsayalım. $\zeta \in LI(R)$, $v \in L(M)$ ve $\zeta \cdot v \subseteq \mu$ olsun. Varsayalım ki $v \not\subseteq \mu$ ve $\zeta \not\subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M) = 1_{\sqrt{\mu_* : M}} \cup c_R$ olsun. $\exists r \in R$ ve $x \in M$ vardır öyle ki

$\zeta(r) \not\subseteq (1_{\sqrt{\mu_*:M}} \cup c_R)(r)$ ve $v(x) \not\subseteq \mu(x)$ 'dir. Böylece $r \notin \sqrt{\mu_*:M}$ ve $x \notin \mu_*$ olur. μ_* 'ın M 'nin asallanabilir alt modülü olduğundan $r \notin \sqrt{\mu_*:M}$ ve $x \notin \mu_*$ olur ve $rx \notin \mu_*$ sağlanır ve böylece $\mu(rx) = c$ olur. Buradan

$$\zeta(r) \wedge v(x) \leq (\zeta \cdot v)(rx) \leq \mu(rx) = c$$

elde edilir. Bu c 'nin L 'de asal eleman olmasıyla çelişir. Böylece ya $\zeta \subseteq \mathfrak{R}(\mu:1_M)$ ya da $v \subseteq \mu$ olur. Buradan da μ , M 'nin asallanabilir bir L -alt modülüdür.

Teorem 8.4: $\mu \in L(M)$ olsun. μ 'nün M 'nin asallanabilir bir L -alt modülü olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki şartları sağlamasıdır:

- (1) μ_* M 'nin asallanabilir bir alt modülü,
- (2) $(\mu:1_M)(1)$, L 'de asal bir eleman,
- (3) $r_a \cdot x_b \subseteq \mu$, $r \in R$, $x \in M$ ve $a, b \in L \Rightarrow r_a \subseteq \mathfrak{R}(\mu:1_M)$ ya da $x_b \subseteq \mu$.

İspat: μ , M 'nin asallanabilir bir L -alt modülü olsun Teorem 8.3 ve Teorem 7.8'den μ (1) ve (2) koşulunu sağlar ve $\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M$ 'dir. Şimdi $r_a \cdot x_b \subseteq \mu$ olacak şekilde $\exists r \in R$, $x \in M$ ve $a, b \in L$ kabul edelim, fakat $r_a \not\subseteq \mathfrak{R}(\mu:1_M) = 1_{\sqrt{\mu_*:M}} \cup c_R$ ve $x_b \not\subseteq \mu$ 'dir. O zaman $r \notin \sqrt{\mu_*:M}$ ve $x \notin \mu_*$ 'dır. μ_* 'ın M 'nin asallanabilir bir alt modülü olduğundan $rx \notin \mu_*$ olur. Bunun sonucu olarak bir taraftan $r_a \cdot x_b \subseteq \mu$ ve $rx \notin \mu_*$ 'den $a \wedge b \leq \mu(rx) = c$ 'ye ve diğer taraftan $r_a \not\subseteq \mathfrak{R}(\mu:1_M)$ ve $x_b \not\subseteq \mu$ 'den $a \not\subseteq (\mathfrak{R}(\mu:1_M))(r) = c$ ve $b \not\subseteq \mu(x) = c$ 'ye sahibiz. Bu durum (2) koşuluyla çelişir. Buradan μ , (3) koşulunu sağlamak zorundadır.

μ 'nün (1), (2) ve (3) koşullarını sağladığını kabul edelim. $c = (\mu:1_M)(1)$ L 'de asal bir eleman ve $a = 1$ olsun. $x \in M \setminus \mu_*$ ve $b = \mu(x)$ olsun. O zaman $1_b \cdot x_a = x_b \subseteq \mu$ olur. $x_a \not\subseteq \mu$ olduğu açıktır. Buradan (3) koşulu gereği $1_b \subseteq \mathfrak{R}(\mu:1_M)$ ve böylece

$$\begin{aligned} b &= 1_b(1) \\ &\leq (\mathfrak{R}(\mu:1_M))(1) \\ &= (\mu:1_M)(1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= c \\
&= \vee \{ \eta(1) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \} \\
&= \vee \{ \eta(1) \wedge 1_M(x) \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot 1_M \subseteq \mu \} \\
&\leq \mu(x) \\
&= b
\end{aligned}$$

olur. Bunun sonucunda $\mu(x) = (\mu : 1_M)(1) = c$ ve $\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M$ 'dir. Buradan Teorem 8.3 gereğince μ M 'nin asallanabilir bir L -alt modülüdür.

Teorem 8.4'ün (3) koşulu aşağıdaki şekilde de ifade edilebilir:

$$(3)' \quad \zeta \cdot v \subseteq \mu, \zeta \in L^R, v \in L^M \Rightarrow \zeta \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M) \text{ ya da } v \subseteq \mu$$

Lemma 8.5: Eğer N , M 'nin asallanabilir bir alt modülü ise $N : M$ asallanabilir bir idealdir ve buradan $\sqrt{N : M}$ R 'nin asallanabilir bir ideali olur.

İspat: Farzedelim ki N M 'nin asallanabilir bir alt modülü olsun. $st \in N : M$ olacak şekilde $s, t \in R$ olsun. $stM \subseteq N$ olur. Eğer $t \notin N : M$ ise $s(tx) \in N$ olacak şekilde bir $x \in M$ vardır fakat $tx \notin N$ 'dir. Bunun sonucu olarak bir $m \in \square$ vardır öyle ki $s^m \in N : M$ 'dir. Buradan $N : M$ asallanabilir bir idealdir ve böylece $\sqrt{N : M}$ R 'nin asallanabilir bir idealidir sonucu çıkar.

Teorem 8.6: Eğer μ M 'nin asallanabilir bir L -alt modülü ise $\mu : 1_M$ de R 'nin asallanabilir bir L -ideali olur ve buradan da $\mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ R 'nin asallanabilir bir L -idealidir.

İspat: Farzedelim ki μ M 'nin asallanabilir bir L -alt modülü olsun. Teorem 8.3 gereği, μ_* M 'nin asallanabilir bir alt modülü ve c de L 'de asal bir eleman olmak üzere $\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M$ olur. Lemma 8.5'den $\mu_* : M$ asallanabilir bir ideal ve buradan $\sqrt{\mu_* : M}$ de R 'nin asallanabilir bir ideali olur. Böylece $\mu : 1_M = 1_{\mu_* : M} \cup c_R$ R 'nin asallanabilir bir L -ideali olur ve buradan $\mathfrak{R}(\mu : 1_M) = 1_{\sqrt{\mu_* : M}} \cup c_R$ R 'nin asallanabilir bir L -idealidir.

Teorem 8.7: $v \in L^M$ ve μ M 'nin asallanabilir bir L -alt modülü olsun.

$$(1) \quad v \subseteq \mu \Rightarrow \mu : v = 1_R ;$$

$$(2) \nu \not\subseteq \mu \Rightarrow \mathfrak{R}(\mu : \nu) = \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$$

dir.

İspat:

(1) Eğer $\nu \subseteq \mu$ ise $\forall \eta \in LI(R)$ için $\eta \cdot \nu \subseteq 1_R \cdot \nu \subseteq 1_R \cdot \mu = \mu$ 'dir. Buradan

$$\mu : \nu = \bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \} = 1_R$$

(2) $\nu \not\subseteq \mu$ olduğunu kabul edelim. Eğer bazı $\eta \in LI(R)$ için $\eta \cdot \nu \subseteq \mu$ oluyorsa Tanım 8.1'den $\eta \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ olur. Bunun sonucunda $\mu : \nu = \bigcup \{ \eta \mid \eta \in LI(R), \eta \cdot \nu \subseteq \mu \} \subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ aynı zamanda $\mu : 1_M \subseteq \mu : \nu$ 'dir ve böylece $\mathfrak{R}(\mu : 1_M) \subseteq \mathfrak{R}(\mu : \nu)$ olur ve buradan da $\mathfrak{R}(\mu : \nu) = \mathfrak{R}(\mathfrak{R}(\mu : 1_M)) = \mathfrak{R}(\mu : \nu)$ elde edilir.

Teorem 8.8: $\mu \in L(M)$, $\zeta \in LI(R)$ ve μ M'nin asallanabilir bir L-alt modülü olsun.

$$(1) \zeta \not\subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M) \Rightarrow \mu : \zeta = \mu ;$$

$$(2) \zeta \subseteq \mu : 1_M \Rightarrow \mu : \zeta = 1_M$$

dir.

İspat:

(1) $\zeta \not\subseteq \mathfrak{R}(\mu : 1_M)$ olduğunu kabul edelim. Eğer bazı $\nu \in L(M)$ için $\zeta \cdot \nu \subseteq \mu$ oluyorsa o zaman Tanım 8.1'den $\nu \subseteq \mu$ olur. Böylece Teorem 7.5'den,

$$\mu : \zeta = \bigcup \{ \nu \mid \nu \in LI(R), \zeta \cdot \nu \subseteq \mu \} \subseteq \mu$$

dir. $\zeta \cdot \mu \subseteq 1_R \cdot \mu = \mu$ olduğu açıktır ve böylece $\mu \subseteq \mu : \zeta$ olur ve buradan da $\mu : \zeta = \mu$.

(2) Varsayalım ki $\zeta \subseteq \mu : 1_M$ olsun. Teorem 7.3'den $\zeta \cdot 1_M \subseteq (\mu : 1_M) \cdot 1_M \subseteq \mu$ olur. Bunun sonucunda $\forall \nu \in L(M)$ için $\zeta \cdot \nu \subseteq \zeta \cdot 1_M \subseteq \mu$ 'dir. Buradan da $\mu : \zeta = 1_M$ elde edilir.

Teorem 8.9: N bir R-modül ve f de $f : M \rightarrow N$ olmak üzere bir epimorfizma olsun.

(1) Eğer μ bir M'nin asallanabilir L-alt modülü ve f-invaryant öyle ki $\forall x, y \in M$ için $f(x) = f(y) \Rightarrow \mu(x) = \mu(y)$ ise $f(\mu)$ N'nin asallanabilir bir L-alt modülüdür.

(2) Eğer ν N'nin asallanabilir bir L-alt modülü ise $f^{-1}(\nu)$ de M'nin asallanabilir bir L-alt modülüdür.

İspat:

(1) Varsayalım ki, μ bir M 'nin asallanabilir L -alt modülü ve f -invariant olsun. Teorem 8.3 gereği μ_* M 'nin asallanabilir bir alt modülü ve $c \in L$ 'de asal bir eleman olduğundan $\mu = 1_{\mu_*} \cup c_M$ 'dir.

$$f(\mu) = 1_{f(\mu_*)} \cup c_N$$

olduğu kolaylıkla gösterilir. Biz şimdi $f(\mu_*)$ 'ın N 'nin asallanabilir bir alt modülü olduğunu gösterelim. Bazı $x \in M$ için $x \in M$ ve $ry = rf(x) \in f(\mu_*)$ olsun. $f(rx) = rf(x) \in f(\mu_*)$ 'dır. μ f -invariant olduğundan $rx \in \mu_*$ 'dır. Aynı zamanda μ_* M 'nin asallanabilir bir alt modülü olduğundan ya $x \in \mu_*$ ya da $\exists m \in \square$ vardır öyle ki $r^m \in \mu_* : M$ 'dir. Buradan $y = f(x) \in f(\mu_*)$ ya da $\exists m \in \square$ için $r^m N = r^m f(M) = f(r^m M) \in f(\mu_*)$ 'dır. Bunun sonucunda $f(\mu_*)$ N 'nin asallanabilir bir alt modülü olur. Buradan Teorem 8.3 gereği $f(\mu)$ N 'nin asallanabilir bir L -alt modülüdür.

(2) Varsayalım ki $v \in N$ 'nin asallanabilir bir L -alt modülü olsun. Teorem 8.3'den v_* M 'nin asallanabilir bir alt modülü ve $c \in L$ 'de asal bir eleman olduğundan $v = 1_{v_*} \cup c_N$ olur.

$$f^{-1}(v) = 1_{f^{-1}(v_*)} \cup c_M$$

olduğu kolaylıkla gösterilebilir. Biz şimdi $f^{-1}(v_*)$ 'ın M 'nin asallanabilir bir alt modülü olduğunu gösterelim. $r \in R$, $x \in M$ ve $rx \in f^{-1}(v_*)$ olsun. $rf(x) = f(rx) \in v_*$ 'dır. v_* N 'nin asallanabilir bir alt modülü olduğundan ya $f(x) \in v_*$ ya da $\exists m \in \square$ için $r^m N \subseteq v_*$ 'dır. Buradan $x \in f^{-1}(v_*)$ ya da $\exists m \in \square$ için $r^m N = r^m f(M) = f(r^m M) \subseteq v_*$ 'dır ve böylece $r^m M \subseteq f^{-1}(v_*)$ olur. Böylelikle $f^{-1}(v_*)$ M 'nin asallanabilir bir alt modülü olur. Buradan da Teorem 8.3 gereği $f^{-1}(v)$ M 'nin asallanabilir bir L -alt modülüdür.

9. SONUÇLAR

Bu tezimizde klasik cebirde önemli bir yere sahip modül teorisinin bulanık değişmeli cebirdeki karşılığının ne olduğunu gösterdik. Modüller için bulanık alanda araştırma yapmak isteyenler için yardımcı kaynak teşkil edecek niteliktedir.

KAYNAKLAR

Abou-Zaid S. , On Fuzzy Subgroups, Cairo University, Giza, Egypt, 1992

Ajmal N. , Homomorphism Of Fuzzy Groups and Quatient Groups, University Of Delhi, New Delhi, India, 1993

Alkhamees, Y. and Mordeson, J. N., Fuzzy Localized Subrings, Information Sciences 99 183-193, 1997.

Bhamri S.K., Kumar R. ve Kumar R., Fuzzy Prime Submodules and radical of a fuzzy submodule, Bull. Cal. Math. Soc. 87, 1995, 163-168.

Bhamri S.K., Kumar R. ve Kumar R., On Fuzzy Primary Submodules, Bull. Cal. Math. Soc. 86, 1994, 445-452.

Kumar, R., Certain fuzzy ideals of rings redefined, Fuzzy sets and systems 46 251-260, 1992.

Kumar, R., Dixit, V.N. and Ajmal, N., On fuzzy rings, Fuzzy sets and systems 49 205-213, 1992.

Makamba, B.B., Murali V., On Fuzzy Prime Submodules and radicals, J. Fuzzy math., 8 (4), 831-843, 2000.

Malik D.S. and Morderson J. , Fuzzy Commutative Algebra, World Scientific Co. Pte. Ltd., Singapore ,1998

Rosenfeld,A. Fuzzy groups, J. Math. Anal. Appl. 35 512-517, 1971.

Zadeh, L. A., Fuzzy sets, Inform. Control 8 383-353, 1965.

Zahedi, M.M., On L-fuzzy primary submodules, Fuzzy sets and Systems, 49, 231-236, 1992

ÖZGEÇMİŞ

Doğum tarihi 23.10.1979

Doğum yeri Bolu

Lise 1990–1997 Bolu İzzet Baysal Anadolu Lisesi

Lisans 1997–2001 Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak.
Matematik Bölümü

Çalıştığı kurumlar

2001–2006 Cihangir İlköğretim Okulu

2006–Devam Ediyor Maçka Akif Tuncel Endüstriyel Teknik Okulları