

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Banach Uzay, Line, Ope, Küm, Refl.

Yüksek Lisans Tezi

Seçil Kozan

2005

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
KÜTÜPHANE VE DOKÜMANTASYON
DAİRE BAŞKANLIĞI

Yer No (DDC): R.209/267

Kayıt No : 3129
Geldiği Yer : Fen Bilim Enst.
Tarih : 05.06.06
Fiyat : 1.20
Fatura No :
Ayniyat No : 1-6
Ek :

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

VI-24

BANACH UZAYLARINDA LİNEER OPERATÖRLERİN
KÜMESİNİN REFLEKSİFLİLİĞİ

Matematikçi Seçil KOZAN

FBE Matematik Anabilim dalı Matematik Programında

Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Doç. Dr. Ömer GÖK

Doç. Dr. Ömer Gök

Prof. Dr. Mustafa Sivri

Doç. Dr. Mustafa Bayraktar

İSTANBUL, 2005

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ	iii
ÖNSÖZ	iv
ÖZET	v
ABSTRACT	vi
1 ÖN BİLGİLER	1
2 $\mathcal{L}(V)$ NİN SONLU BOYUTLU ALT UZAYLARI.....	4
3 $\mathfrak{B}(X)$ İN SAYILABİLİR ÜRETİLEBİLEN ALT UZAYLARI.....	9
4 İKİ ÇOK DEĞİŞKENLİ NETİCE	17
5 HADWIN'İN BİR UYGULAMASI	19
6 SONUÇLAR.....	21
KAYNAKLAR.....	23
ÖZGEÇMİŞ.....	24

SİMGE LİSTESİ

$\aleph_0$	Alef sıfır
Alg	Cebir
$\oplus$	Direk toplam
$\in$	Eleman
$\mathfrak{B}(H)$	H 'den H 'ye sürekli, sınırlı, lineer operatörlerin uzayı
$\subseteq$	Kapsama
$\times$	Kartezyen çarpımı
$\cap$	Kesişim
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar
Lat	Latis
$\ \cdot\ $	Norm
M_n	$n \times n$ boyutlu kompleks matris
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar
ref	Refleksif
$\vee$	Supremum
$\otimes$	Tensör çarpımı
I	Birim operatör
$\sum_{i=1}^n$	1'den n 'e kadar toplam

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sırasında yardımlarını esirgemeyen, daima saygıyla anacağım Sayın Hocam Doç. Dr. Ömer GÖK'e teşekkürlerimi sunarım.

ÖZET

H bir sonsuz boyutlu Hilbert uzayı ve $\mathfrak{B}(H)$, H den H ye sürekli (sınırlı) lineer operatörlerin uzayı olsun. Bu çalışmada $\mathfrak{B}(H)$ 'ın sonlu boyutlu alt cebirlerinin refleksif olduğu üzerinde durulmuş, Hilbert uzayında cebirsel refleksiflik üzerinde çalışılmıştır. Yapılan ispatlar, çarpımsal yapıya veya topolojiye bağlı olmadığından, soyut bir kümedeki dönüşümlerin lineer alt uzaylarına genişletilmiştir.

Bazı neticeler, bir Banach uzayındaki sınırlı lineer dönüşümlerin sayılabilir lineer alt uzayları için, cebirsel refleksifliğine genişletilmiştir. Bu çalışmada iki önemli genelleme yapılır. Birincisi; bir Banach uzayındaki sınırlı yerel bir cebirsel operatör, cebirseldir. Diğeri ise; bir Banach uzayındaki sınırlı cebirsel olmayan bir operatör, (topolojik olarak) cebirseldir. Ayrıca, bir uygulama verilmiştir.

Bu çalışmaların sonucundan ve alt uzay teorisinden faydalanarak, bir $\alpha \subseteq \mathfrak{B}(H)$ refleksif lineer alt uzayının, $\mathfrak{B}(H \oplus H)$ in refleksif bir alt cebiri olduğu ve gerekli özellikler ile alt uzaylar oluşturmaın genelde cebirlerden daha basit olduğu söylenebilir. Cebirsel refleksiflik özellikleri, bir α Banach cebirindeki lineer dönüşümlerin alt uzaylarını da ilgilendirir.

Bu çalışmada vurgulanan diğeri bir kavram ise lineer interpolasyondur. Refleksiflik özellikleri, lineer interpolasyon özellikleri olarak da yorumlanabilir.

Anahtar kelimeler: Cebirsel refleksiflik, refleksif alt uzay, ayırıcı vektör, sonlu rank operatörleri, lineer interpolasyon.

ABSTRACT

Let H be an infinite dimensional Hilbert space and $\mathfrak{B}(H)$ be the space of continuous (bounded) linear operators which is from H to H . In this study, it is emphasized that finite dimensional subalgebras of $\mathfrak{B}(H)$ are reflexive and worked about algebraic reflexivity on Hilbert spaces. Proofs do not depend on multiplicative structure, nor on topology, so extend to linear subspaces of transformations in an abstract setting.

Some results extend to algebraic reflexivity counterparts for countably generated linear subspaces of bounded linear transformations acting on a Banach space. Here, two important generalizations are obtained: Firstly; a bounded locally algebraic operator acting on a Banach space is algebraic. The other is that a bounded non – algebraic operator acting on a Banach space is (topologically) algebraically reflexive. In addition, an application was given.

According to the results of this study and subspace theory, it can be said that a reflexive linear subspace α in $\mathfrak{B}(H)$ is a reflexive subalgebra of $\mathfrak{B}(H \oplus H)$ and subspace with requisite properties are often simpler to construct than algebras. Algebraic reflexivity properties can be interested in subspaces of linear transformations acting on a Banach algebra α .

Also linear interpolation is the other notion that was mentioned. Reflexivity properties can be interpreted as linear interpolation properties.

Keywords: Algebraically reflexive, reflexive subspace, separating vector, finite rank operators, linear interpolation.

1. ÖN BİLGİLER

H bir Hilbert uzayı; $\mathfrak{B}(H)$, H den H ye sürekli lineer operatörlerin uzayı olsun. Refleksiflik, H nin kapalı alt uzaylarının latileri için ve $\mathfrak{B}(H)$ nın alt cebirleri için Halmos tarafından sunulmuştur.

Tanım 1.1: Herhangi bir $\mathcal{P}$ kapalı alt uzayı için $\text{alg } \mathcal{P}$, her $\mathcal{P}$ elemanını değişmez bırakan $\mathfrak{B}(H)$ deki tüm operatörlerin cebiri olsun.

$\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{B}(H)$ bir operatör kümesi; $\text{lat } (\mathcal{E})$, $\mathcal{E}$ ile sol değişmez olan kapalı alt uzayların latisi olsun.

Buna göre, bir $\mathcal{L}$ latisi, $\mathcal{L} = \text{lat alg } (\mathcal{L})$ ise refleksiftir.

Bir $\alpha \subseteq \mathfrak{B}(H)$ cebiri de, $\alpha = \text{alg lat } (\alpha)$ ise refleksiftir.

Laginov ve Sulman, bu terimleri $\mathfrak{B}(H)$ in cebir olmayan $\mathcal{S}$ lineer alt uzaylarını kapsayacak şekilde genişletmişlerdir. $[\cdot]$ kapalılığını göstermek üzere;

$$\text{ref } (\mathcal{S}) = \{T \in \mathfrak{B}(H): Tx \in [\mathcal{S}x], x \in H\}$$

kümesini yazabiliriz. Eğer α birimsel cebir ise, $\text{lat } \alpha$, α nın kapalı devirli alt uzayları tarafından belirlenir ve böylece $\alpha = \text{alg lat } (\alpha)$ olur.

Bir lineer $\mathcal{S}$ alt uzayı, $\mathcal{S} = \text{ref } (\mathcal{S})$ ise refleksiftir. Refleksif alt uzaylar, (Azoff, E., (1996), Kraus, J. ve Larson, D., (1985), Kraus, J. ve Larson, D., (1986), Larson, D., (1986), Loginov, A. ve Sulman, V., (1975)) operatör cebirlerinin analizlerinde faydalı olmuşlardır. Bu tanımlar keyfi bir topolojik vektör uzayı ile yer değiştirmiş H ile anlamlı olurlar.

Cebirsel refleksiflik kavramı, farklı bağlamlarda görülmüştür. Tanım, ilk defa Hadwin tarafından kullanmıştır.

Tanım 1.2: V , $\mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun.

$\mathcal{L}(V)$ ise V den kendisine tüm $\mathcal{F}$ - lineer dönüşümlerini gösterebilir.

Eğer V bir topolojik vektör uzayı ise ($\mathbb{R}$ ve $\mathbb{C}$ üzerinde), $\mathcal{L}(V)$ nin sürekli elemanları cebiri için $\mathfrak{B}(V)$ yazarız.

Cebirsel “alg”, “lat”, “ref” tanımları; “kapalı alt uzay”, “alt uzay” ile, $[\mathcal{S}]$, $\mathcal{S}$ ile yer değiştirdiği zamanda benzer olur.

$\text{ref}_a(\mathcal{S}) = \{T \in \mathcal{L}(V): Tx \in \mathcal{S}, x \in V\}$ ve $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(V)$ için V topolojik ise

$\text{ref}_{at}(\mathcal{S}) = \{T \in \mathcal{B}(V): Tx \in \mathcal{S}, x \in V\}$

yazabiliriz. Böylece $T \in \text{ref}_a(\mathcal{S})$ ancak ve ancak her $x \in V$ için $\mathcal{S} = Tx$ olacak şekilde x 'e bağlı $S \in \mathcal{S}$ elemanının var olmasıyla mümkündür. Yani, T , $\mathcal{S}$ 'yi interpolate eder. T ye yerel olarak $\mathcal{S}$ de diyebiliriz.

Eğer $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}(V)$ nin sonlu boyutlu bir alt uzayı ise; $\text{ref}(\mathcal{S}) = \text{ref}_a(\mathcal{S}) = \text{ref}_{at}(\mathcal{S})$ kolayca gerçekleşir.

Eğer $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(V)$ sonsuz boyutlu ise $\text{ref}_a(\mathcal{S})$ sınırsız operatörleri de içerebilir. Lineer dönüşümlerin bir alt uzayı $\mathcal{S}$, eğer $\mathcal{S} = \text{ref}_a(\mathcal{S})$ ise cebirsel refleksiftir.

$\mathcal{S} = \text{ref}_{at}(\mathcal{S})$ ise (topolojik olarak) cebirsel refleksiftir.

Tanım 1.3: Eğer $\mathcal{F}$ deki katsayılar ile T deki tüm çok terimli polinomların $\mathcal{P}(T)$ cebiri, özelliğe sahip ise, bir T lineer dönüşümü bu özelliklere sahip olacak şekilde tanımlanır. Eğer bazı adi olmayan $\mathcal{P}(t)$ polinomu için $\mathcal{P}(T) = 0$ ise T , cebirseldir.

Her $x \in V$ için $\mathcal{P}(T)x = 0$ gibi x e bağlı bir adi olmayan $\mathcal{P}(T)$ polinomu var ise T , yerel olarak cebirseldir.

Tanım 1.4: Bir $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{L}(V)$ alt uzay olsun. $x \in V$ için, $\mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}x$, $S \in \mathcal{S}$

dönüşümü bire-bir ise $x \in V$ vektörüne $\mathcal{S}$ alt uzayı için ayırıştırıcı vektör denir.

$\mathcal{L}(V)$ deki tüm sonlu rank dönüşümleri uzayı için $\mathcal{L}_F(V)$,

$\mathcal{B}(V)$ deki tüm sonlu rank dönüşümleri uzayı için $\mathcal{B}_F(V)$ yazabiliriz.

Burada sonlu boyutlu alt uzayları soyut bir kümede düşünüyoruz. Refleksiflik uyumundan dolayı, tüm sonuçlar (ve ispatlar); eğer topoloji kabul edilirse ve “ ref_a ”, “ ref_{at} ” veya “ ref ” ile

yer değiştirebilirse geçerli olur. Topoloji kabulü, Hilbert uzayı dışında ispatlara bir fayda sağlamaz.

2.bölümde bir X Banach uzayı için $\mathfrak{B}(X)$ in sayılabilir cebirsel alt uzayları için sonuçlarımızı veriyoruz. Evrensel uzayın tamlığının yokluğunda bu bölümün sonuçlarının genişlemeleri, tek olarak üretilen cebirler için bile daima mümkün değildir.

2. $\mathcal{L}(V)$ NİN SONLU BOYUTLU ALT UZAYLARI

$V, \mathcal{F}$ cismi üzerinde bir vektör uzayı olsun. Eğer $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(V)$, nin bir alt uzayı ise

$\mathcal{S}_F = \mathcal{S} \cap \mathcal{L}_F(V)$ yazabiliriz.

Eğer $\mathcal{S}$ sonlu boyutlu ise $\mathcal{S}$ nin refleksiflik özelliklerinin $\mathcal{S}_F$ ninkilerle belirlendiğini göstereceğiz. Teorem 2.6, $\text{ref}_a(\mathcal{S}) = \mathcal{S} + \text{ref}_a(\mathcal{S}_F)$ olduğunu söyler. Bir sonuç da, $\mathcal{S}$ nin refleksif olması, ancak ve ancak $\mathcal{S}_F$ nin refleksif olmasıyla mümkündür. İspat adımlarla tamamlanmıştır.

Yardımcı Teorem 2.1: $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(V)$ 'nin sonlu boyutlu lineer bir alt uzayı olsun. Eğer W_1, W_2, V de sonlu eş boyuta sahip lineer alt uzayları iseler, $\{x \in W_1: \mathcal{S}_x \subseteq W_2\}$, V de sonlu eş boyuta sahiptir.

İspat: $\{S_1, \dots, S_n\}$, $\mathcal{S}$ 'i için bir taban olsun. V 'den W_2 'ye Hamel tabanı ile elde edilen herhangi bir izdüşüm P olsun. Böylece $(I - P) \mathcal{S}$ sonlu ranklı lineer dönüşümlerin bir kümesi olur.

$K, \{(I - P) S_1, \dots, (I - P) S_n\}$ çekirdeklerinin kesişimi olsun. K sonlu eş boyuta sahiptir. Böylece $K \cap W_1$ de öyledir.

$(I - P) \mathcal{S}(K \cap W_1) = 0$ olduğundan $\mathcal{S}(K \cap W_1) \subseteq W_2$ olur.

Eğer $\mathcal{S}_F = \{0\}$ ise, $\mathcal{S}$ “sonsuz çarpıma” sahip olmalı ve böylece bir ayrıştıran vektör olmalı. Bunu sonra kanıtlayacağız.

Yardımcı Teorem 2.2: $\mathcal{S}_F = \{0\}$ olmak üzere, $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(V)$ 'nin sonlu boyutlu bir lineer alt uzayı olsun. Eğer W_1, W_2, V 'nin sonlu eş boyutlu lineer alt uzayları ise $\mathcal{S}_x \subseteq W_2$ olacak şekilde $\mathcal{S}$ için ayrıştıran bir $x \in W_1$ vektörü vardır.

İspat: İlk olarak eğer $\text{boy}(\mathcal{S}) = 1$ ise, $\mathcal{S}$ sonsuz ranklı tek lineer S_1 dönüşümünün skaler katlarından meydana gelir. Yardımcı teorem 2.1 den, $\{u \in W_1: S_1 u \subseteq W_2\}$ alt uzayı, V de

sonlu eş boyuta sahiptir ve bu nedenle $S_x \neq 0$ olan bir x vektörünü kapsar. Bu da bizim ihtiyacımızı karşılar.

Tümevarımla, boyutu n den küçük tüm alt uzaylar için bu sonucun geçerli olduğunu kabul edelim. $\{S_1, \dots, S_{n+1}\}$ lineer bağımsız iken, boy $(\mathcal{S}) = n+1$ olsun. $\mathcal{S} = \text{span} \{S_1, \dots, S_{n+1}\}$ yazalım. $\tilde{W}_1 = \{u : \in W_1 : Su \in W_2\}$ ve $\tilde{\mathcal{S}} = \text{span} \{S_1, \dots, S_n\}$ olsun. Yardımcı teorem 2.1 den $\tilde{W}_1, V$ de sonlu eş boyuta sahiptir. Bu yüzden tümevarım hipoteziyle $\tilde{\mathcal{S}}$ için ayrıştıran bir $x \in W_1$ vektörü vardır. $\tilde{W}_1$ in tanımından, $S_x \subseteq W_2$ dir. Yani eğer $x, \mathcal{S}$ yi ayrıştırıyorsa ispat biter. Ayrıştırmıyorsa $S_x = 0$ olan $0 \neq s \in S$ elemanı vardır. Böylece $\mathcal{S} = \text{span} \{S_1, \dots, S_{n+1}, S\}$ olur.

Şimdi M, S_x in V de herhangi bir tümleyen vektör uzayını gösterebiliriz.

$\hat{W}_2 = W_2 \cap M$ ve $\hat{W}_1 = \{u \in \tilde{W}_1 : Su \in \hat{W}_2\}$ olur.

$\tilde{W}_1, V$ de sonlu eş boyuta sahiptir, böylece $\mathcal{S}$ sonsuz ranka sahip olduğundan, $S_y \neq 0$ olan $y \in \tilde{W}_1$ vardır. $x + y$ nin $\mathcal{S}$ için ayrıştıran vektör olduğunu göstereceğiz. $x, y \in W_1$ ve $S_x \subseteq W_2$ olduğundan, $S_y \subseteq W_2$ dir ve ispat tamamlanacaktır.

Eğer $0 \neq T \in S$ ise, o zaman bazı $\alpha, \alpha_i \in \mathcal{F}$ için $T = \alpha S + \alpha_1 S_1 + \dots + \alpha_n S_n$ olur. $T_x \in \mathcal{S}_x$ ve $T_y \in M$ olduğundan, $T_{(x+y)} \neq 0$ olduğunu göstermek için, $T_x \neq 0$ veya $T_y \neq 0$ olduğunu göstermek yeterlidir. $S_x = 0$ olduğundan $T_x = \alpha_1 S_1 x + \dots + \alpha_n S_n x$ olur ve $x, \{S_1, \dots, S_n\}$ i ayrıştırır. Eğer $T_x = 0$ ise $1 \leq i \leq n$ için $\alpha_i = 0$ dir. O zaman $\alpha \neq 0$ iken $T = \alpha S$ dir. Bu yüzden $T_y \neq 0$ dir.

Yardımcı teorem 2.2 yi desteklemek için sonlu boyutlu alt uzaylar için bir ayrıştıran vektörün yokluğu bir sonlu rank sınırlamasıdır.

Önerme 2.3: $\mathcal{S}, \mathcal{L}(V)$ ' nin sonlu boyutlu bir lineer alt uzayı olsun. $\mathcal{S}$ nin bir ayrıştıran vektörü olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}_F$ nin bir ayrıştıran vektörü olmasıdır.

İspat: İspat için sadece tek yönü göstermek yeterlidir.

$\mathcal{S}_F = \text{span} \{S_1, \dots, S_k\}$ ve $\text{span} \{S_{k+1}, \dots, S_n\} \cap \mathcal{L}_F(V) = \{0\}$ kabul ettiğimizde

$\mathcal{S} = \text{span} \{S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots, S_n\}$ yazalım.

u , $\mathcal{S}_F$ için ayrıştıran vektör ve M, S_u nun V de bir tümleyeni olsun.

K ise $S_1, \dots, S_k$ nin çekirdeklerinin kesişimi olsun. K ve M, V de sonlu eş boyuta sahip olduklarından, yardımcı teorem 2.2 den, $\text{span} \{S_{k+1}, \dots, S_n\}$ için ayrıştıran bir $v \in K$ vektörü vardır ki, $\{S_{k+1}v, \dots, S_nv\} \subseteq M$ dir. $x = u + v$ olsun.

Eğer $T \in \mathcal{S}$ ise, $T_1 \in \mathcal{S}_F$, $T_2 \in \text{span} \{S_{k+1}, \dots, S_n\}$ olacak şekilde $T = T_1 + T_2$ yazalım.

$T_u \in \mathcal{S}_u$ ve $T_v = T_2v \in M$ idi. Bu yüzden eğer $T_x = 0$ ise $T_u = 0$ ve $T_v = 0$ dir. Fakat $T_2v = 0$

ise $T_2 = 0$ dir. Buradan $T = T_1$ dir. Fakat u , $\mathcal{S}_F$ ayrıştırdığından $T_1 = 0$ dir. Yani $T = 0$ dir. Bu yüzden x , $\mathcal{S}$ için ayrıştıran vektördür.

Yardımcı Teorem 2.4: $\mathcal{S}_F = \{0\}$ olan $\mathcal{S}, \mathcal{L}(V)$ ' nin sonlu boyutlu bir lineer alt uzayı olsun.

Böyle ise $\mathcal{S}$ refleksifdir.

İspat: Eğer $T \in \mathcal{L}(V)$ keyfi ise, $\mathcal{L}_F(V) \cap \text{span}\{T, \mathcal{S}\}$ en fazla bir boyutlu olabilir, yani bir ayrıştıran vektörü vardır. Böylece önerme 2.3'ten $\text{span}\{T, \mathcal{S}\}$ nin bir x ayrıştıran vektörü vardır. Bundan eğer $T \notin \mathcal{S}$ ise $T_x \notin \mathcal{S}_x$ dir. Yani $T \notin \text{ref}_a(\mathcal{S})$ dir.

Yardımcı Teorem 2.5: $\mathcal{S}, \mathcal{L}(V)$ 'nin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun.

$\text{ref}_a(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{L}_F(V)$ dir.

İspat: $T \in \text{ref}_a(\mathcal{S})$ olsun. $M = (\mathcal{S} \cap \mathcal{F}) \cap V$, V nin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. Q da V den

M ye örten herhangi bir izdüşüm olsun. $((I-Q)\mathcal{S}) \cap \mathcal{L}_F(V) = 0$ dir. Bu yüzden yardımcı teorem

2.4'ten $(I-Q)\mathcal{S}$ refleksifdir. $(I-Q)T \in \text{ref}_a((I-Q)\mathcal{S}) = (I-Q)\mathcal{S}$ olduğundan bazı $s \in \mathcal{S}$ için

$(I-Q)T = (I-Q)S$ olur. Böylece $T = S + Q(T-S)$ olur ve bu yüzden $T \in \mathcal{S} + \mathcal{L}_F(V)$ dir.

Teorem 2.6: $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(V)$ nin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. $\text{ref}_a(\mathcal{S}) = \mathcal{S} + \text{ref}_a(\mathcal{S}_F)$ dir.

İspat: Yardımcı teorem 2.5 ten, $\text{ref}_a(\mathcal{S})$ deki herhangi bir sonlu-rank lineer dönüşümlerin $\text{ref}_a(\mathcal{S}_F)$ 'de olduğunu göstermek yeterlidir.

Bu yüzden $T \in \mathcal{L}_F(V) \cap \text{ref}_a(\mathcal{S})$ olsun. Öyle $u \in V$ ler için $Tu \in (\mathcal{S}_F)$ olduğunu göstereceğiz.

$u \in V$ keyfi olsun. $\{S_1, \dots, S_n\}$, $\mathcal{S}$ için taban ve $\mathcal{S}_F = \text{span} \{S_{k+1}, \dots, S_n\}$ olmak üzere

$\mathcal{S} = \text{span} \{S_1, \dots, S_k, S_{k+1}, \dots, S_n\}$ yazalım. $\mathcal{S}_1 = \text{span} \{S_{k+1}, \dots, S_n\}$ olsun.

O zaman $\mathcal{L}_F(V) \cap \mathcal{S}_1 = \{0\}$ diyelim. N, V de $\mathcal{S}_1$ nin herhangi bir tümleyen vektör uzay olsun.

K da $\{T, S_1, \dots, S_k\}$ nin çekirdeklerinin kesişimi olsun. Böylece N ve K , V de sonlu eş boyuta sahiptir. Yardımcı teorem 2.2 den $\mathcal{S}_1 y \subseteq N$ yi sağlayan ve $y \in K$ olan S_1 için bir ayrıştıran y

vektörü bulabiliriz. $x = u + y$ olsun. $T \in \text{ref}_a(\mathcal{S})$ olduğundan, F de x e bağlı

$\{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ skalerleri vardır ki, $Tu = (\alpha_1 S_1, \dots, \alpha_n S_n)$ dir. $i \geq k+1$ için, $y \in \text{çek}(S_i)$ ve $y \in \text{çek}$

(T) olduğundan, $Tu = T_x = T(u + y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i(u + y) = \sum_{i=1}^n \alpha_i S_i u + \sum_{i=k+1}^n \alpha_i S_i y$ olur. $Tu \in$

$\mathcal{S}_1$ ve $\mathcal{S}_1 y \subseteq N$ olduğundan $\sum_{i=k+1}^n \alpha_i S_i y = 0$ olur. Fakat y , $\mathcal{S}_1$ yi ayrıştırdığından ve $\{S_{k+1}, \dots, S_n\}$

lineer bağımsız olduğundan $\alpha_i = 0$ dir. ($k+1 \leq i \leq n$ için). Böylece $Tu \in (\mathcal{S}_F)_u$ olur. $Tu \in (\mathcal{S}_F)_u$

olduğunu, $\forall u \in V$ için gösterdik. Buradan $T \in \text{ref}_a(\mathcal{S}_F)$ dir.

Teorem 2.7: $\mathcal{S} \in \mathcal{L}(V)$ sonlu rank operatörlerini içeren sonlu boyutlu bir lineer alt uzayı olsun.

Bu durumda $\text{ref}_a(\mathcal{S})$ de sonlu rank operatörleri içerir ve sonlu boyutludur.

İspat: $\mathcal{S} = P\mathcal{Q}$ şeklinde P ve Q , sonlu rank izdüşümleri olsun. $PL(V)Q$, cebirsel refleksif

olduğundan, $\text{ref}_a(\mathcal{S})$ yi kapsadığını göstermek kolaydır. $PL(V)Q$ sonlu boyutlu olduğundan ve

$\mathcal{L}_F(V)$ tarafından kapsandığından, sonuç elde edilir.

Sonuç 2.8: $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}(V)$ 'nin sonlu boyutlu bir alt uzayı olsun. $\mathcal{S}$ 'nin refleksif olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}_F$ 'nin refleksif olmasıdır.

İspat: Eğer $\text{ref}_a(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S}_F$ ise Teorem 2.6 dan $\text{ref}_a(\mathcal{S}) = \mathcal{S} + \text{ref}_a(\mathcal{S}_F)$ olduğundan $\mathcal{S}$ de refleksifdir. Tam tersine $\mathcal{S}$ refleksif olsun.

$\mathcal{S} = \text{ref}_a(\mathcal{S}) = \mathcal{S} + \text{ref}_a(\mathcal{S}_F)$ olur ve bu yüzden $\text{ref}_a(\mathcal{S}_F) \subseteq \mathcal{S}$ dir. Fakat yardımcı teorem 2.7 den $\text{ref}_a(\mathcal{S}_F) \subseteq \mathcal{L}_F(V)$ idi. Böylece $\text{ref}_a(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S}_F$ dir.

Teorem 2.6 nın ve yardımcı teorem 2.7 nin bir neticesi olarak şu sonucu yazabiliriz.

Sonuç 2.9: $\mathcal{S}$, $\mathcal{L}(V)$ 'nin sonlu boyutlu lineer bir alt uzayı olsun. Böyle ise $\text{ref}_a(\mathcal{S})$ ' de sonlu boyutludur.

3. $\mathfrak{B}(X)$ İN SAYILABİLİR ÜRETİLEBİLEN ALT UZAYLARI

X , reel veya kompleks bir Banach uzayı olmak üzere, 2.bölümün sonuçlarını, sayılabilir Hamel tabanlı lineer alt uzaylar için zıt kısımları genişletelim. Bu bölümün ana sonuçları 3.2, 3.5 ve 3.7 teoremleridir.

İlk olarak yardımcı teorem 2.2'nin bir genellemesine ihtiyacımız vardır. Tam bir genelleme mümkün değildir çünkü eğer, W_2 , X in kapalı olan bir öz alt uzayı ise, $\mathcal{S}$ topolojik olarak geçişken olabilir ve bu yüzden $\mathcal{S}_x \subseteq W_2$ yi sağlayan hiçbir ayrıştıran x vektörü yoktur.

Halbuki eğer E , X in sayılabilir Hamel tabanlı bir alt uzayı ise, $(\mathcal{S}_x) \cap E = \{0\}$ olan $\mathcal{S}$ için ayrıştıran bir x vektörün varlığını sağlamak için yeterli kontrol vardır, öyle ki; $\mathcal{S}_F = \mathcal{S} \cap \mathfrak{B}(X)$ iken $\mathcal{S}_F = \{0\}$ dır. E sonlu boyutlu olsa bile kapalı bir tümleyen gerekli olmamasına rağmen, $\mathcal{S}_x$, E ' nin bazı tümleyenleri tarafından kapsanacaktır. Bu da yeterlidir.

Yardımcı Teorem 3.1: X bir Banach uzayı, $\mathcal{S}$, $\mathfrak{B}(X)$ ' in sayılabilir Hamel tabanlı lineer bir alt uzayı olsun. W , X in, X te sonlu eş boyuta sahip kapalı lineer bir alt uzayı olsun. E ise, X in sayılabilir Hamel tabanlı lineer bir alt uzayı olsun.

Eğer $\mathcal{S}_F = \{0\}$ ise, W , $(\mathcal{S}_x) \cap E = \{0\}$ olan $\mathcal{S}$ için ayrıştıran bir x vektörü kapsar.

İspat: S_i operatörleri ve v_i vektörleri lineer bağımsız olmaları gerekli olmayan ve tekrar edilebilir olsunlar. $\mathcal{S} = \text{span} \{S_1, S_2, \dots\}$ ve $E = \text{span} \{v_1, v_2, \dots\}$ yazalım.

Her n için $\mathcal{S}_n = \text{span} \{S_1, \dots, S_n\}$ ve $E_n = \text{span} \{v_1, \dots, v_n\}$ olsun. $\{\epsilon_i\}_{i=1}^{\infty}$, pozitif sayıların bir dizisi olsun ve $\sum \epsilon_i < \infty$ şartını sağlasın.

Biz tümevarımla, $\|x_i\| \leq \epsilon_i$ olacak şekilde vektörlerin bir dizisini ve X in kapalı alt uzaylarının

$\{L_i\}$ bir dizisini oluşturacağız. Onlar birlikte $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ nin bizim ihtiyacımızı karşılayacak

şekilde özellikleri sağlar. (ihtiyaç duyulduğunda, $\sum x_i$ nin yakınsaklığı, X in tümleyeninden alınacaktır.)

Sağlanacak özellikler şunlardır:

1. X 'te kapalı eş boyuta sahip her L_i kapalıdır ve $L_i \cap E = \{0\}$ dir.

2. $L_i \supseteq L_{i+1}, i \geq 1$

3. W deki $\mathcal{S}_i$ yi ayrıştıran x_i bir vektördür ve $\|x_i\| \leq \varepsilon_i$ dir.

4. Her i için $\mathcal{S}_i \subseteq L_i$

5. $F_i = \text{span}\{x_1, \dots, x_i\}$ iken $L_{i+1} \cap (E_i + \mathcal{S}_{i+1} F_i) = \{0\}$, $i \geq 1$.

L_1 ' i, E_1 ' in herhangi bir kapalı tümleyeni alarak başlayalım. L_1 ve W nin sonlu eş boyuta sahip olmalarından dolayı, yardımcı teorem 2.2 den, $\mathcal{S}_1$ için, $\mathcal{S}_1 x_1 \subseteq L_1$ olacak şekilde bir ayrıştıran $x_1 \in W$ vektörü bulunur. Gerekirse skalerle çarpılarak $\|x_1\| \leq \varepsilon_1$ elde edilir.

$\{x_1, \dots, x_n\}$ ve $\{L_1, \dots, L_n\}$, (1) den (5) e kadar olan özellikleri sağlasın. M , $(E_{n+1} + \mathcal{S}_{n+1} F_n)$ nin kapalı bir tümleyeni ve $L_{n+1} = M \cap L_n$ olsun. Buradan L_{n+1} , (1), (2) ve (5) i sağlar. Yardımcı teorem 2.2 den, $\mathcal{S}_{n+1} x_{n+1} \subseteq L_{n+1}$ olacak şekilde, $\mathcal{S}_{n+1}$ için ayrıştıran $x_{n+1} \in W$ vektörü bulunur.

Gerekirse skalerle çarpılarak $\|x_{n+1}\| \leq \varepsilon_{n+1}$ elde edilir. O zaman $\{L_1, \dots, L_{n+1}\}$ den $\{x_1, \dots, x_{n+1}\}$, (1) den (5) e kadar olan özellikleri sağlar.

Şimdi $x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i$ olsun. Her $x_i \in W$ ve W kapalı olduğundan, $x \in W$ dir. Eğer $s \in \mathcal{S}$ ve $S_x \in E$ ise,

$S = 0$ olduğunu göstereceğiz.

$S_x \in E$ iken, $S \in \mathcal{S}$ olduğunu kabul edelim. O zaman bir i için $S_x \in E_i$ ve bir j için $S \in \mathcal{S}_j$ olur.

Böylece eğer $n = \max\{i, j\}$ ise, $S \in \mathcal{S}_n$ ve $S_x \in E_n$ olur. , $n \geq 2$ farz edebiliriz.

$y = \sum_{i=1}^{n-1} x_i$ ve $z = \sum_{i=n}^{\infty} x_i$ diyelim. O zaman $x = y + z$ olur ve $\mathcal{S}_y + \mathcal{S}_z = E_n$ olur.

$i \geq n$ için $S_x \in L_i \subseteq L_n$ olduğunu biliyoruz ve böylece $\mathcal{S}$ sürekli ve L_n kapalı olduğundan

$S_z \in L_n$ olur. Ayrıca $S_y \in \mathcal{S}_n E_{n-1}$ ve $S_x \in E_n$ dir. Bu nedenle $S_z = S_x - S_y \in E_n + \mathcal{S}_n F_{n-1}$ olur.

Fakat 5. özellikten $(L_n \cap E_n + \mathcal{S}_n F_{n-1}) = \{0\}$ dir. Buradan $S_z = 0$ olur Yani $\sum_{i=1}^{\infty} S_{x_i} = 0$ dir.

Fakat ayrıca $S_x \in E_{n+1}$ ve $S \in \mathcal{S}_{n+1}$ olduğundan aynı tartışma ile $\sum_{i=1}^{\infty} S_{x_i} = 0$ buluruz.

Böylece $Sx_n = 0$ olur. x_n nin S_n için ayrıştırıcı vektör ve $S \in \mathcal{S}_n$ olduğundan, $S = 0$ buluruz.

Yukarıdaki paragraf $(S_x) \cap E = \{0\}$ olduğunu gösterir. Ayrıca $Sx = 0$ iken $S \in \mathcal{S}$ ise x in S için ayrıştıran vektör olduğunu gösterir. Buradan $S_x \in E$ ve $S = 0$ olur.

Önerme 2.3 ün bir kısmi genellemesini elde ederiz. Eğer $\mathcal{S} \subseteq \mathcal{B}(X)$ bir ayrıştıran vektöre sahip ise bu vektör $\mathcal{S}_F$ yi de ayrıştırır. Bulduğumuz kısmi ters; eğer $\mathcal{S}$ sayılabilir Hamel tabanlı, $\mathcal{S}_F$ nin elemanlarının çekirdeklerinin kesişimi X te sonlu eş boyuta sahip ise ve eğer $\mathcal{S}$ bir ayrıştıran vektöre sahip ise, S de bir ayrıştıran vektöre sahiptir. $\mathcal{S}_F$ deki, “sonlu boyut desteği” şartının düşürülüp düşürülmeyeceği bilinmemektedir.

Teorem 3.2: X bir Banach uzayı olsun. $\{v \in X : \mathcal{S}_F v = \{0\}\}$, X te sonlu eş boyuta sahip olacak şekilde, $\mathcal{S}, \mathcal{B}(X)$ in sayılabilir Hamel tabanlı bir lineer alt uzayı olsun. Böylece $\mathcal{S}$ nin ayrıştıran bir vektöre sahip olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}_F$ nin de sahip olmasıdır.

İspat: Tek yönlü göstermek yeterlidir. $S_1, \mathcal{S}$ de $\mathcal{S}_F$ nin tümleyen bir vektör uzayı olsun. (Kapalı olması gerekmez.) $u, \mathcal{S}_F$ için ayrıştıran bir vektör ve $E = \mathcal{S}_u$ olsun. W ye, $\mathcal{S}_F$ nin elemanlarının çekirdeklerinin kesişimi diyelim. Böylece S_1, W, E , yardımcı teorem 3.1’in hipotezini sağlar ve bu yüzden $(\mathcal{S}_1 v) \cap E = (0)$ olacak şekilde S_1 için ayrıştıran $v \in W$ vektörü vardır. $u + v = x$ olsun. İspat, önerme 2.3 deki gibi devam eder.

Eğer ise $S \in \mathcal{S}$ ise $S_1 \in \mathcal{S}_F$ ve $S_2 \in S_1$ iken $S = S_1 + S_2$ olur. $S_u \in E, S_v = S_2 v \in S_1 v$ idi. Eğer $S_x = 0$ ise $S_v = -S_u \in E \cap (S_1 v) = (0)$ dır. Böylece $S_v = S_u = 0$ dır. Fakat $S_2 v = 0$ olduğundan, V, S_1 i ayrıştırdığından dolayı $S_2 = 0$ dır. Böylece $S = S_1$ dir. Buradan $S_1 u = 0$ olur, böylece $u, \mathcal{S}_F$ ayrıştırdığından $S_1 = 0$ dır. O halde $S = 0$ dır. x in $\mathcal{S}$ yi ayrıştırdığını gösterdik.

Sıradaki örnek, (topolojik olarak) cebirsel refleksiflik ve sonlu boyutlu uzaylardaki cebirsel refleksiflik arasındaki farkı vurgular.

Örnek 3.3: H , sonsuz boyutlu bir Hilbert uzayı olsun. $u, v \in H$ için, $u \otimes v^*, w \in E$ ‘yi $\langle w, u \rangle u$ ya götüren $\mathcal{B}(H)$ ta bir operatörü gösterebilirsin.

Sabit bir $u \neq 0$ için $S_u = \{u \otimes v^* : v \in H\}$ alt uzayı refleksif ise; (topolojik olarak) cebirsel refleksiftir. Fakat cebirsel refleksif değildir. Eğer ϕ , H de süreksiz bir lineer fonksiyonel ise, $w \in E$ iken $Tw = \phi(w)$ şeklinde tanımlı süreksiz operatör S_u yu H üzerinde interpolate edecektir. S_u da olmayacaktır.

Yardımcı Teorem 3.4: X bir Banach uzayı, $\mathcal{S}$ ise, $\mathcal{S}_F = \{0\}$ olan sayılabilir Hamel tabanlı bir lineer alt uzayı olsun. Böyle ise $\mathcal{S}$ (topolojik olarak) cebirsel refleksiftir.

İspat: $T \in \mathcal{B}(H)$ keyfi ve $\tilde{S} = \text{span} \{T, \mathcal{S}\}$ olsun. Buradan, $(\tilde{S})_F$, en fazla bir boyutludur, bu yüzden ayrıştıran bir vektör vardır ve teorem 3.2 deki şartı sağlar. Böylece $\tilde{S}$ nin bir x ayrıştıran vektörü vardır. Eğer $T \notin \mathcal{S}$ ise $T_x \notin \mathcal{S}_x$ tir. Buradan $T \notin \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S})$ olur.

Teorem 3.5: X bir Banach uzayı, $\mathcal{S}$, $\mathcal{B}(X)$ in sayılabilir Hamel tabanlı bir lineer alt uzayı olsun. Böylece $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}) \subseteq \mathcal{S} + \mathcal{B}_F(X)$ tir.

İspat: Bir Baire Kategori teoremi kullanırız.

$\mathcal{S} = \text{span} \{S_1, S_2, \dots\}$ ve $\mathcal{S}_n = \text{span} \{S_1, \dots, S_n\}$, $n \geq 1$ yazalım. Yani $\mathcal{S} = \bigcup_n \mathcal{S}_n$ olur.

$T \in \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S})$ olsun. Her $n, k \geq 1$ için

$\varepsilon_n^k = \{x \in X, T_u = S_u \text{ olan } \|S_i\| \leq k \text{ olacak şekilde } S \in \mathcal{S}_n \text{ var}\}$ olsun.

Buradan $X = \bigcup \{\varepsilon_n^k : n, k \geq 1\}$ olur.

$x = \lim x_i$, $x_i \in \varepsilon_n^k$ olsun. Her i için $Tx_i = S_i x_i$ olan $\|S_i\| \leq k$ olacak şekilde $S_i \in \mathcal{S}_n$ vardır. $\mathcal{S}_n$

sonlu boyutlu olduğundan, $\{S \in \mathcal{S}_i : \|S\| \leq k\}$ kompaktır. Bu yüzden $\{S_i\}$ yakınsak bir $\{S_{i_j}\}$

alt dizisine sahiptir. $\tilde{S} = \lim S_{i_j}$ olsun.

Buradan $x_{i_j} \rightarrow x$ olur, bu yüzden $Tx = \lim Tx_{i_j} = \lim S_{i_j} x_{i_j} = \tilde{S} x$ olur. $\|\tilde{S}\| \leq k$ idi. Böylece $x \in$

ε_n^k olur ve buradan ε_n^k kapalıdır.

Baire Kategori teoreminden ε_n^k , X te içi boş değildir. O halde, $z \in X$, $\varepsilon > 0$, n ve k lar için ε_n^k kümesi $B_\varepsilon(z) = \{v \in X : \|v - z\| < \varepsilon\}$ yi içerir. Sonra $\|x\| < \varepsilon$ yi sağlayan her $x \in X$ için, $T(x+z) = S_x(x+z)$ olan x e bağlı, $S_x \in \mathcal{S}_n$ mevcuttur. [Bu, $T \in \text{ref}(\mathcal{S}_n)$ demek değildir. Bunun için Örnek 3.6'ya bakınız.]

$F_1 = \mathcal{S}_n z$ ve $F_2 = (\mathcal{S}_n)_F X$ olsun. Buradan F_1, F_2, X in sonlu boyutlu alt uzaylarıdır.

$F = F_1 \vee F_2 = \text{span} \{F_1, F_2\}$ ve P, X ten F ye herhangi bir sürekli izdüşüm olsun.

$(I-P)(\mathcal{S}_n)_F = \{0\}$ idi, o halde P sonlu ranka sahip olduğundan $((I-P)\mathcal{S}_n)_F = \{0\}$ dir ve böylece $(I-P)\mathcal{S}_n$ refleksifdir.

Bazı $S_o \in \mathcal{S}_n$ için $T_z = S_o z$ olduğunu yazalım, öyle ise $T_z \in F$ dir ve $(I-P)T_z = \{0\}$ dir.

Böylece eğer $\|x\| < \varepsilon$ olacak şekilde $x \in X$ ise, $(I-P)\mathcal{S}_n z = 0$ olduğundan,

$$(I-P)T_x = (I-P)T(x+z) = (I-P)S_x(x+z) = (I-P)S_x x \text{ olur.}$$

Bu $(I-P)T \in \text{ref}((I-P)\mathcal{S}_n) = (I-P)S_x$ olduğunu gösterir.

Bu yüzden bazı $S \in \mathcal{S}_n$ ler için $(I-P)T = (I-P)S$ olur. Böylece bir S için

$T = S + P(T-S)$ olur. $S \in \mathcal{S}$ ve $P(T-S) \in \mathfrak{B}_F(X)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Örnek 3.6: Bir lineer dönüşüm, sıfırdan farklı bir yuvar üzerinde, bir $\mathcal{S}$ lineer alt uzayını interpolate edebilir ama $\text{ref}_a, \mathcal{S}$ de olmayabilir.

$$\mathcal{S} = \left\{ \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \gamma \end{bmatrix} : \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C} \right\} \text{ 2 boyutlu bir } H \text{ Hilbert uzayı için ortonormal bir } \{e_1, e_2\}$$

tabanına göre olan üst üçgen operatörlerin cebirini gösterebilir. Böyle ise, $\mathcal{S}$ refleksifdir.

$B_1(e_2) = \{x \in H : \|x - e_2\| < 1\}$ olsun. Eğer $x \in B_1(e_2)$ ise, $\mathcal{S}_x = H$ olur. Buradan,

$$T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{ nin, } B_1(e_2) \text{ üzerinde } \mathcal{S} \text{ yi interpolate ettiğini elde ederiz.}$$

Biz teorem 2.6 nın kısmi bir genellemesini elde ederiz. Örnek 3.9 da bu, en iyi genel netice, mümkün olabilir.

Teorem 3.7: X bir Banach uzayı olsun. $\mathcal{S}$ sayılabilir Hamel tabanlı $\mathfrak{B}(X)$ in lineer bir alt uzayı olsun, öyle ki, $\{v \in X : \mathcal{S}_F v = \{0\}\}$, X te sonlu eş boyuta sahip olsun.

Bu durumda;

i. $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} + \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F)$ ve

ii. $\mathcal{S}$ nin (topolojik olarak) cebirsel refleksif olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{S}_F$ nin (topolojik olarak) cebirsel refleksif olmasıdır.

İspat (i): Teorem 3.5 ten eğer $T \in \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S})$ ve T sonlu ranka sahip ise $T \in \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F)$ olduğunu göstermek yeterlidir. S_I , $\mathcal{S}$ de, $\mathcal{S}_F$ nin herhangi bir tümleyeni olsun. (Kapalı olması gerekmez.) $u \in X$ keyfi olsun. $T_u \in \mathcal{S}_F u$ olduğunu göstereceğiz.

$E = \mathcal{S}u$, $K = \text{çek}(T)$ ve $W = K \cap \{v \in X : \mathcal{S}_F v = \{0\}\}$ olsun. Buradan W kapalıdır ve X te sonlu eş boyuta sahiptir. Dolayısıyla yardımcı teoremden 3.1 den $W, (S, y) \cap E = (0)$ olacak şekilde S_I için bir y ayrıştıran vektörü içerir. Buradan $T_y = 0$ dır.

Bu yüzden $Tu = T(u + y)$ dir. $T \in \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F)$ olduğundan, $T(u + y) = S(u + y)$ olacak şekilde $S \in \mathcal{S}$ vardır. $S_I \in \mathcal{S}_F$, $S_2 \in S_I$ olacak şekilde $S = S_I + S_2$ olarak ayrıştıralım. $S_I y = 0$ yazalım, $Tu = S(u + y) = S_I u + S_2 u + S_2 y$ idi ve $Tu \in \mathcal{S}u$ olduğundan, $S_2 y \in S_2 u$ dur.

Fakat $(S_I y) \cap (\mathcal{S}u) = \{0\}$ olduğundan $S_2 y = 0$ dır. Ve böylece $S_2 = 0$ olur, y , S_I yi ayrıştırır. O halde $S = S_I \in \mathcal{S}_F$ dir.

Biz her $u \in X$ için $T_u = \mathcal{S}u$ olacak şekilde bir $S \in \mathcal{S}$ olduğunu gösterdik. Bu yüzden

$T \in \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F)$ olur ve (i) nin ispatı tamamlanır.

(ii): (i) den yararlanılır. Eğer $\mathcal{S}_F$ (topolojik olarak) cebirsel refleksif ise,

$\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F) = \mathcal{S} + \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}) = \mathcal{S} + \mathcal{S}_F = \mathcal{S}$ dir. Karşıt olarak, eğer $\mathcal{S}$ refleksif ise,

$\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F) \subseteq \mathcal{S}$ dir. $M = \{v \in X : \mathcal{S}_F v = \{0\}\}$ olsun.

M , hipotezden, sonlu karşıt boyuta sahiptir ve kapalıdır, bu yüzden X ten M ye sınırlı bir P izdüşümü mevcuttur. Buradan $S(I - P) = S$, $S \in \mathcal{S}_F$ dir ve $\mathfrak{B}(X)(I - P)$, $\mathfrak{B}(X)$ in refleksif bir alt uzayıdır, o halde $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F) \subseteq \mathfrak{B}(X)(I - P) \subseteq \mathfrak{B}_F(X)$ olur. Böylece, istendiği gibi,

$\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F) \subseteq \mathcal{S} \cap \mathfrak{B}_F(X) = \mathcal{S}_F$ olur. İspat tamamlanmıştır.

Eğer $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{B}_F(X)$; $\mathcal{S}$, sonlu boyutlu refleksif alt uzayların $S_n \subseteq S_{n+1}$ birleşimi olsa bile, sayılabilir Hamel tabanlı bir alt uzay ise bu $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F)$ için gerekli değildir. Bu yüzden sonuç 2.9 tamamen genelleştirilemez. Ayrıca sayılabilir Hamel tabanlı bir $\mathcal{S}$ alt uzayında, $\mathcal{S}_F$ bir boyuta sahip olsa bile, eğer teorem 3.7 deki $\mathcal{S}_F$ de “sonlu boyut desteği” şartı sağlanmazsa, $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}) \neq \mathcal{S} + \text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}_F)$ olabilir. Ek olarak H , bir Hilbert uzayı olmak üzere eğer, $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{B}(H)$ ise $S^* = \{S^* : S \in \mathcal{S}\}$ (topolojik olarak) cebirsel refleksif değilken $\mathcal{S}$ olabilir. Bu durum refleksiflik için tersine de geçerlidir. Buna iki örnek verelim:

Örnek 3.8: $\{e_i : e_i = 1, 2, \dots\}$ sonsuz boyutlu ayrılabilir H Hilbert uzayı için bir ortonormal taban olsun. Her i, j için E_{ij} , her x vektörünü $\langle x, e_j \rangle e_i$ vektörüne götüren bir operatördür.

$\mathcal{S} = \text{span} \{E_{1n} : n = 1, \dots\}$ olsun. Buradan $\mathcal{S} \subseteq \mathfrak{B}(H)$ olur ve $\mathcal{S}_n = \text{span} \{E_{11}, E_{12}, \dots, E_{1n}\}$ iken

$\mathcal{S} = \bigcup_n \mathcal{S}_n$ olur. Her $\mathcal{S}_n$; P, Q izdüşümler olmak üzere, $P \mathfrak{B}(H) Q$ biçimine sahiptir ve bu

yüzden refleksifdir. Eğer $w \neq 0$ keyfi değilse x 'i, $\langle x, w \rangle e_1$ e götüren $(e_1 \otimes w^*)$ operatörü, $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S})$ dedir. Gerçekten $\text{ref}_{\text{at}}(\mathcal{S}) = \{e_1 \otimes w^* : w \in H\}$ dir. Bu, sayılamaz Hamel tabanlıdır.

Şimdi, sonlu boyutlu destek şartını sağlamazken, adjoint S^* ın sağladığını düşünelim. Gerçekten S^* (topolojik olarak) cebirsel refleksifdir. Eğer $T, S^* = \text{span} \{E_{n1} : n = 1, \dots\}$ 'yi interpolate ederse ve $x \perp e_1$ iken $x \in H$ ise $S_x^* = 0$ elde ederiz, bu yüzden $T_x = 0$ olur, böylece bir $w \in H$ için $T = (w \otimes e_1^*)$ olur ve bir $S \in \mathcal{S}$ için $Te_1 = S^* e_1$ olduğundan, w , taban vektörlerinin sonlu bir kombinasyonu olmalıdır. Dolayısıyla $T \in S^*$ dır.

Örnek 3.9: Terimler, örnek 3.8'deki gibi olsun. $a_0 = \text{span} \{E_{ij} : i < j\}$, bir tam üst üçgen cebiri ve $a = a_0 + CI$ olsun. Buradan $a_F = a_0$ dir. $E_{11} = T$ diyelim, o halde $T \notin a$ dır fakat T, a yı interpolate eder. Gerçekten, $x \in H$ keyfi olsun. Eğer $\langle x, e_1 \rangle = 0$ ise $T_x = 0$ dır, bu yüzden $T_x \in a_x$

tir. Son olarak $Te_I = I e_I \in a e_I$ olur. Böylece $T_x \in a_x$, $x \in H$ olur, buradan $T \in \text{ref}_{\text{at}}(a)$ dir.

$Te_I = e_I$ ve $a_o e_I = \{0\}$ olduğundan, T, a_o 1 interpolate edemez.

Bu da $\text{ref}_{\text{at}}(a) \neq a + \text{ref}_{\text{at}}(a_F)$ olduğunu gösterir.

4. İKİ ÇOK DEĞİŞKENLİ NETİCE

Tam olmayan normlu lineer uzaylarda cebirsel olmayan fakat yerel cebirsel olan sınırlı lineer operatörler bulunur. Taban vektörlerine karşılık gelen tüm sonlu lineer kombinezonlarından oluşan Hilbert uzayının yoğun alt uzaylarına kısıtlanmış geriye doğru kaydırmayla bir örnek verilmiştir (Kaplansky, I., (1954).)'daki teorem 15'e göre, eğer X bir reel veya kompleks Banach uzayı ve $\mathcal{S} \in \mathfrak{B}(X)$ yerel cebirsel ise, $\mathcal{S}$ cebirseldir. 3. bölümü kullanarak bu sonucun bir genellemesini elde edeceğiz.

Teorem 4.1: X bir Banach uzayı, $\{S_1, \dots, S_n\} \subset \mathfrak{B}(X)$ olsun.

Her $x \in X$ için, $P_x(S_1, \dots, S_n)x = 0$ olacak şekilde, n (değişmez) değişken içinde, bir sıfırdan farklı $P_x(t_1, \dots, t_n)$ polinomu olsun. Böylece $P(S_1, \dots, S_n) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $P(t_1, \dots, t_n)$ polinomu vardır.

İspat = $\mathcal{P}$, n değişmez değişkenlerinin içinde tüm polinomların vektör uzayını gösterebilir.

[Eğer X reel ise (kompleks ise), reel (kompleks) katsayıları farz ederiz]. Eğer bir x için

$P_x(S_1, \dots, S_n) = 0$ ise ispat tamamlanır. Eğer her operatör $P_x(S_1, \dots, S_n) \neq 0$ ise,

$\mathcal{S} = \{P(S_1, \dots, S_n) : P \in \mathcal{P}\}$ bir ayrıştıran vektöre sahip olamaz. $\mathcal{S}$, sayılabilir Hamel tabanlı

$\mathfrak{B}(X)$ in lineer bir alt uzayı olduğundan, Teorem 3.2 (ya da yardımcı teorem 3.2) den $\mathcal{S}_F \neq \{0\}$

dır. Bu yüzden bir $Q \in \mathcal{P}$ için, $Q = (S_1, \dots, S_n)$ sıfırdan farklı sonlu ranklı bir operatördür,

buradan da cebirseldir. Böylece $F(Q(T_1, \dots, T_n)) = 0$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $F(t)$ polinomu mevcuttur. $P = F_0 Q$ olsun.

Uyarılar: Yukarıdaki aparatın bir incelemesi şunu gösterir: Teorem 4.1 in $\{S_1, \dots, S_n\}$ operatörlerinin bazıları ya da tümü, $\mathcal{P}$ nin bölüm veya alt uzayı ile ispatta $\mathcal{P}$ yerine konularak

teorem 4.1'e uygulanabilir. Ayrıca, $1 \leq n \leq \aleph_0$ olabilir. Yani; eğer $\{S_1, S_2, \dots\} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ herhangi

bir dizi ve $\mathcal{P}$ sayılabilir çok değerli polinomların kümesi ise (her $P \in \mathcal{P}$ nin sonlu, sıfır olmayan birçok katsayıya sahip olduğu bir küme), teoremin ifadesi ve ispatı aynı kalır.

(Douglas, R.G. ve Foias, C., (1976)) te elde edilmiş sonuçlardan biri, $T \in \mathfrak{B}(H)$ eğer cebirsel değilse, $\mathfrak{B}(H)$ taki operatörlerin kümesi; H nin her alt lineer modifoldunu T ile sol değişmez

bırakan T deki tüm polinomların kümesi $\mathcal{P}(T)$ ile çakışır. Bu genişletilmiş çalışma (Fillmore, P.A., (1973)) da başlamıştır. (Hadwin, D., 1983) de, bu sonucun keyfi Banach uzaylarına ve soyut vektör uzaylarına genişletildiği daha cebirsel bir ispat elde edilmiştir. Eğer $\mathcal{F}$ sonsuz ise yerel olmayan cebirsel operatörlerin bu özelliğe sahip olduğu kanıtlanmıştır. Bu yüzden Kaplansky teoreminin bir uygulaması, Banach uzayı sonucunu ortaya çıkarmıştır. Hadwin, “cebirsel refleksif” terimini; T operatörlerini göstermek ve böylece tamamen evrensel vektör uzayının lineer değişmez alt manifoldları tarafından belirlenen operatörlerin birimli cebirlerini göstermek için kullanılmıştır.

Birimli cebirler için bu, kullandığımız alt uzay tanımına denktir. Biz, cebirsel refleksiflik ve (topolojik olarak) cebirsel refleksiflik arasında, daha önce verilen sebepler için ayırım yaparız. Bölüm 3’ü kullanarak, bir Banach uzayı üzerindeki cebirsel olmayan sınırlı bir lineer operatörün, (topolojik olarak) cebirsel refleksifdir genellemesini elde ederiz.

Teorem 4.2: X bir Banach uzayı ve $\{S_1, \dots, S_n\} \subset \mathcal{B}(X)$ olsun. Eğer her n (değişmez) değişkenli sıfır olmayan $P(t_1, \dots, t_n)$ polinomu için, $P(S_1, \dots, S_n) \neq 0$ ise; $S_1, \dots, S_n$ değişkenli operatörler içindeki tüm polinomların $\mathcal{P}(S_1, \dots, S_n)$ cebiri, (topolojik olarak) cebirsel refleksifdir.

İspat: İspat, teorem 3.7 (veya yardımcı teorem 3.4)’ün, teorem 3.2’nin yerine kullanıldığı teorem 4.1 e benzerdir. $\mathcal{P}(S_1, \dots, S_n)$ cebiri, $\mathcal{B}(X)$ in sayılabilir Hamel tabanlı bir alt uzayıdır, bu yüzden eğer $\mathcal{P}(S_1, \dots, S_n)$ cebiri, (topolojik olarak) cebirsel refleksif değilse, bir $P(S_1, \dots, S_n)$, sıfır olmayan sonlu ranklı operatördür. Fakat buradan bazı sıfır olmayan $Q(t)$ ler için $(Q \circ P)(S_1, \dots, S_n) = 0$ dır, bu da bir çelişkidir.

Uyarılar: Teorem 4.1 deki gibi, yukarıdaki teorem değişken değerlere uygulanır ve $1 \leq n \leq \aleph_0$ elde edebiliriz. Ayrıca $\{S_1, \dots, S_n\}$ cebirsel bağımlı olsa bile, eğer $\{S_1, \dots, S_n\}$ içinden hiçbir polinom, sıfır olmayan sonlu ranklı bir operatör değilse, veya daha genel olarak, eğer $\mathcal{P}(S_1, \dots, S_n)$ nin sonlu ranklı alt cebiri, (topolojik olarak) refleksif ve teorem 3.7 nin “sonlu boyut desteği” şartını sağlıyorsa, $\mathcal{P}(S_1, \dots, S_n)$ (topolojik olarak) cebirsel refleksif olacaktır.

5.HADWIN'İN BİR UYGULAMASI

(Hadwin, D., Nordgren, E., Radjavi, H. ve Rosenthal, P., (1979))'daki teorem 1'i genelleyen yardımcı teorem 2.2 nin sıradaki uygulamasını bulduğu ve sonucunu sunduğu için Donald Hadwin'e teşekkür ederiz.

X bir sonlu boyutlu Banach uzayı ve $1 \leq n \leq \infty$ olsun. $\mathfrak{B}(X)$ i, kuvvetli operatör topolojisi (noktasal yakınsaklık) ile donatalım ve $T, \mathfrak{B}(X) \times \dots \times \mathfrak{B}(X)$ (n kere) üzerindeki çarpım topoloji göstereyin. Verilen $\{T_1, \dots, T_n\} \subseteq \mathfrak{B}(X)$ için,

$\mathcal{S}(T_1, \dots, T_n) = \{(S^{-1} T_1 S, \dots, S^{-1} T_n S) : S \in \mathfrak{B}(X), S \text{ tersinir}\}$ ile, joint benzerce yörüngeyi göstereyin.

Teorem 5.1: $\mathcal{S}(T_1, \dots, T_n), \mathfrak{B}(X) \times \dots \times \mathfrak{B}(X)$ de T – yoğun olması için gerek ve yeter koşul; I, X üzerinde birim operatörü göstermek üzere, $\{I, T_1, \dots, T_n\}$ nin lineer bağımsız modül $\mathfrak{B}_F(X)$ olmasıdır.

İspat: $\{I, T_1, \dots, T_n\}$ lineer bağımsız modül $\mathfrak{B}_F(X)$ olsun.

$\{u_i : 1 \leq i \leq \infty\} \cup \{T_j u_i : 1 \leq j \leq \infty, 1 \leq i \leq \infty\}$ kümesini lineer bağımsız olacak şekilde

$\mathcal{S} = \text{span}(I, T_1, \dots, T_n)$ tümevarım yöntemiyle yardımcı teorem 2.2 yi uygulayarak,

$Su_1 \vee Su_2 \vee \dots \vee Su_{i-1}$ vektörlerinin bir dizisini elde edelim, öyle ki i . adımda W_2 alt uzayını düzeltsin.

$(A_1, \dots, A_n)$ keyfi bir n değişkenli ve V bir çarpım komşuluğu olsun. Buradan, $\varepsilon > 0$ için

$V \supseteq \{(B_1, \dots, B_n) : \| (B_i - A_i) x_j \| < \varepsilon, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell\}$ ve $\{x_1, \dots, x_\ell\}$ vektörlerinin lineer

bağımsız bir kümesi vardır. $\{x_1, \dots, x_\ell, z_{1\ell}, \dots, z_{n\ell}, \dots, z_{n\ell}\}$ kümesi lineer bağımsız olacak şekilde

tüm i ve j ler için $\| z_{ij} - A_i x_j \| < \varepsilon$ ile $\{z_{ij} : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell\}$ vektörlerini seçelim. $\mathcal{S}, S_{x_j} = u_j,$

$1 \leq j \leq \ell$ ve $\mathcal{S} z_{ij} = T_i u_j, 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq \ell$ olacak şekilde, tersinir, sınırlı herhangi bir operatör

olsun. O halde $z_{ij} = S^{-1} T_i S x_j$ olur, bu yüzden her $1 \leq i \leq n$ ler ve $1 \leq j \leq \ell$ için

$\| S^{-1} T_i S x_j - A_i x_j \| < \varepsilon$ olur. Böylece istendiği gibi olur. $(S^{-1} T_1 S, \dots, S^{-1} T_n S) \in V$.

Tersine eğer $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ sıfır olmayan skalerlerin bir kümesi,

$\alpha_0 T + \alpha_1 T_1 + \dots + \alpha_n T_n$, $1 \leq k \leq \infty$ ranklı ve $\{S_\lambda\}$, $S_\lambda^{-1}T$; S_λ^{-1} nin $1 \leq i \leq n$ iken bir A_i operatörüne kuvvetli topolojide yakınsadığı bir ağ ise;

$\text{rank}(\sum \alpha_i A_i) \leq \text{rank}(\sum \alpha_i S_\lambda^{-1} T; S_\lambda) = \text{rank}(\sum \alpha_i T_i) = k$ olur, ve buradan n bileşenli $(A_1, \dots, A_n)$ keyfi olamaz. İspat tamamlanmıştır.

Teorem 5.1 operatörler arasındaki her lineer olmayan cebirsel ilişkinin kuvvetli limitler altında korunmadığını göstermek için kullanılır. Örneğin, T , $n+1$ indisinin bir nilpotenti olabilir ve $S_\lambda, S_\lambda^{-1}T \rightarrow T^{n+1-\lambda}$ iken kuvvetli topolojide yakınsamadığı için, tersinir operatörlerin bir neti olabilir.

6.SONUÇLAR

(1) Bölüm 2 ve bölüm 3'ün sonuçları, lineer $\mathcal{L}(V, W)$ ve $\mathfrak{B}(X, Y)$ alt uzayları için cebirsel refleksiflik özelliklerine bir alışılmış yol ile genişletilebilir. Burada bu şekilde yapmadık çünkü bu makaledeki uygulamalarımız için bu genişletilmiş teori gerekmez.

(2) Bu çalışma için bizim asıl güdümüz; $\mathfrak{B}(H)$ 'ın sonlu boyutlu refleksif alt uzaylarının örneklerinin kurulması gerektiğidir. Bölüm 1'in sonuçları, uygun özelliği sağlar. Alt uzay teorisi burada faydalıdır. Çünkü,

$$\begin{bmatrix} CI & \mathcal{S} \\ 0 & CI \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda I & S \\ 0 & \mu I \end{bmatrix} : S \in \mathcal{S}, \lambda, \mu \in \mathbb{C} \right\} \text{ cebirine karşılık gelen verilerin bir } \mathcal{S} \subseteq \mathfrak{B}(H)$$

refleksif lineer alt uzayı, $\mathfrak{B}(H \oplus H)$ 'nın refleksif bir alt cebirdir ve gerekli özellikleri ile

alt uzaylar oluşturmak genelde cebirselden daha basittir. Bu teknik, (Kraus, J.ve Larson, D.,

(1985))' de hiperrefleksif olmayan refleksif cebirin oluşturulmasında gösterilmiştir.

(3) H bir Hilbert uzayı ve $\mathcal{S}, \mathfrak{B}(H)$ nın, sıfır olmayan sonlu ranklı operatör içermeyen sonlu boyutlu bir lineer alt uzayı olsun. Bölüm 1'den refleksifdir ve ayrıştıran bir vektöre sahiptir.

Sonlu boyutluluk ve ayrıştıran bir vektörün var olması, $\mathcal{S}$ nin A_1 (Bercovici, H., Foias, C., Pearcy, C., (1985)) özelliğini sağladığını gösterir (Dr Hadwin, D. ve Nordgren, E., 1982, P_1 (Larson, D, (1982)) denkliği, başlangıç (Azaff, E., (1996)), uzaysal başlangıç (Loginov, A. ve Sulman, V., (1975)). Dahası, eğer n herhangi bir pozitif tamsayı ve M_n , $n \times n$ kompleks matrisleri gösteriyorsa, n -tane direk toplam, $H \oplus \dots \oplus H$ üzerindeki $S \oplus M_n$ alt uzayı da aynı özelliklere sahiptir. Onu, $\mathcal{S}$ nin her n pozitif tamsayısı için A_n özelliğini (Bercovic,i H., Foias, C., Pearcy., (1985)) sağladığını takip eder. O halde $\mathfrak{B}(H)$ ın “çoğu” boyutlu alt uzayları bu özelliğe sahip olur.

(4) Cebirsel refleksiflik özellikleri, bir a Banach cebirindeki lineer dönüşümlerin kesin alt uzayları çalışmasını da ilgilendirir. Eğer $\theta \in \mathfrak{B}(a)$ yerel bir iç türeme ise, θ da olmalı

mıdır? (a nın tüm sınırlı türemelerinin Q uzayı cebirsel refleksif midir?). Eğer yerel bir iç türeme olan θ , bir iç türeme ise, θ iç olmalı mıdır? (iç türemelerin Q_0 uzayı Q de göreceli refleksif midir?) Bölüm 3'ün sonuçları genelde bu soruları karşılamaz. Halbuki, eğer $\{\mathcal{S}_i\}$ sınırlı türevlerin herhangi bir dizisi ise ve $\theta \in \mathfrak{B}(a)$, $\{\mathcal{S}_i\}$ nin sonlu boyutlu yerel bir lineer kombinasyonu ise Teorem 3.5'ten, θ_0 , $\mathcal{S}_i$ 'nin sonlu boyutlu lineer bir kombinasyonu ve θ_1 sonlu boyutlu görüntüsü olmak üzere; $\theta = \theta_0 + \theta_1$ olur.

(5) Bu makalenin vurgusu, lineer interpolasyondur. Daha genel olarak; $\mathcal{S}$ bir X kümesinden bir Y kümesine olan dönüşümlerin kümesi olsun. O halde her $x \in X$ için

$Q(x) = S_x(x)$ şeklinde, x 'e bağlı bir $S_x \in \mathcal{S}$ elemanı varsa, bir θ dönüşümü $\mathcal{S}$ yi interpolate eder diyebiliriz. Notasyonumuzu gerçekleştirebilir ve $\theta \in \text{ref}_a(\mathcal{S})$ yazabiliriz. Uygun hipotezler altında, θ nın $\mathcal{S}$ nin içinde olduğunu veya en azından $\mathcal{S}$ de olmak için “yakın” olduğunu gösterebiliriz. Lineer olmayan bir örnek için; ϕ bir a Banach cebirinin sınırlı bir otomorfizması ve $\mathcal{S}$ de ϕ 'nın tam kuvvetlerinin bir kümesi olsun. Bu, kolaylıkla Baire Kategori teoremi kullanılarak gösterilebilir, yani eğer $\theta \in \mathfrak{B}(a)$ ve $\theta \in \text{ref}_a(\mathcal{S})$ ise $\theta \in \mathcal{S}$ dir. Bu örnek lineer değildir, çünkü $\mathcal{S}$, $\mathfrak{B}(a)$ 'nın lineer bir alt uzayı değildir. Bu yüzden bu makalenin sonuçları arasından çıkarılamaz.

(6) Cebirsel refleksiflik bir çok teoriye uygulanabilir. Örneğin; sistem teorisi, lineer sistemler, vb..

KAYNAKLAR

- Azoff, E., (1996), On finite rank operators and preannihilators, *Memoirs A.M.S.* 64.
- Bercovici, H., Foias, C., Pearcy, C., (1985), Dual algebras with applications to invariant subspaces and dilation theory, *CBMS Regional Conference Series*, 56 A.M.S., Providence.
- Brickman, L., ve Fillmore P.A., (1967), The invariant subspace lattice of a linear transformation, *Canad S., Math.* 19, 810 – 822.
- Deddens, J.A. ve Fillmore, P.A., (1975), Reflexive linear transformations, *J. Linear Alg. and Appl.* 10, 89 – 93.
- Douglas, R.G. ve Foias, C., (1976), Infinite dimensional versions of a theorem of Brickman Fillmore, *Indiana Univ., Mat.* J.25, 315 – 320.
- Fillmore, P.A., (1973), On invariant linear manifolds, *Proc. Amer. Math. Soc.* 41, 501 – 505.
- Hadwin, D., (1983), Algebraically Reflexive Linear Transformations, *Linear and Multilinear Algebra*, 14, 225 – 233.
- Hadwin, D. ve Nordgren, E., (1982), Subalgebras of reflexive algebras, *J. Operator Theory*, 7, 3 – 23.
- Hadwin, D. ve Nordgren, E., Radjavi H. and Rosenthal P., (1979), Most similarity orbits are strongly dense, *Proc. Amer. Math. Soc.* 76, 250 – 252
- Kaplansky, I., (1954), Infinite belian Groups, *Univ. of Michigan Press*, Ann Arbor.
- Kraus, J. ve Larson, D., (1985), Some applications of a technique for construction reflexive operator algebras, *J. Operator Theory*, 13, 227 – 236.
- Kraus, J. ve Larson, D., (1986), Reflexivity and distance formulae, *Proc. London Math. Soc.*, (3), 53, 340 – 356.
- Larson, D., (1986), Hyperreflexivity and a dual product construction. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 294, 76 – 88.
- Larson, D., (1982), Annihilators of operator algebras, *Operator Theory: Advances and Applications*, Birkhauser, Berlin.
- Loginov, A. ve Sulman, V., (1975), Hereditary and intermediate reflexivity of W algebras, *Izv. Akad. Nauk SSSR*, 39, 1260 – 1273, *USSR – Izv.*, 9 (1975), 1189 – 1201.

ÖZGEÇMİŞ

Doğum Tarihi	24/05/1982	
Doğum Yeri	Mersin	
Lise	1996 – 2000	Kenan Evren Anadolu Lisesi
Lisans	2000 – 2004	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2004 – 2006	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Analiz ve Fonksiyonlar Teorisi Anabilim Dalı
Çalıştığı Kurum	2005 –	Devam ediyor. Dersanem Dersanesi Matematik Öğretmeni.

