

YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ  
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

739777

BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

-139711-

Matematikçi Mustafa TAŞTAN

F.B.E Matematik Anabilim Dalı Matematik Programında  
Hazırlanan

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Tez Danışmanı : Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL

Doç. Dr. Göksele AĞARÇUN

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ

İSTANBUL, 2003

YÜKSEKÖĞRETİM KURULU  
DOKÜMAN TAYIN MERKEZİ

# İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	iv
KISALTMA LİSTESİ.....	v
ŞEKİL LİSTESİ.....	vi
ÇİZELGE LİSTESİ.....	vii
ÖNSÖZ.....	viii
ÖZET.....	ix
ABSTRACT.....	x
1. GİRİŞ.....	1
1.1 Bulanık Matematiksel Programlamanın Uygulama Alanları.....	2
2. BULANIK KÜMELER (FUZZY SETS).....	3
2.1 Giriş.....	3
2.2 Bulanık Alt Küme.....	4
2.3 Bulanık Küme.....	4
2.4 Bulanık Kümelerde Temel İşlemler.....	6
2.4.1 Birleşim.....	6
2.4.2 Kesişim.....	6
2.4.3 Tümlleme-Değilleme (Dışında Tutma).....	7
2.4.4 Eşitlik.....	8
2.4.5 Kapsama.....	8
2.4.6 Fark İşlemi.....	9
2.4.7 Cebirsel Çarpım.....	9
2.4.8 Sınırlı Çarpım.....	9
2.4.9 Cebirsel Toplam.....	9
2.4.10 Sınırlı Toplam.....	10
2.4.11 Sınırlı Fark.....	10
2.4.12 Diğer Özellikler.....	11
2.5 Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar.....	12
2.5.1 Bulanık Kümenin Normallığı.....	12
2.5.2 Bulanık Kümenin Konveksliği.....	13
2.5.3 Bulanık Kümenin Desteği.....	14
2.5.4 Bulanık Kümenin $\alpha$ - Kesiti.....	14
2.5.5 Bulanık Kümenin Kardinali.....	15
2.5.6 Bulanık Kümenin M. Kuvveti.....	16
2.6 Uzanım-Genişleme Prensibi.....	16
3. BULANIK SAYILAR (FUZZY NUMBERS).....	18
3.1 Giriş.....	18
3.2 Bulanık Sayılarda İşlemler.....	19
3.2.1 Bulanık Sayılarda Toplama.....	19
3.2.2 Bulanık Sayılarda Çıkarma.....	23
3.2.3 Bulanık Sayılarda Çarpma.....	27
3.2.4 Bulanık Sayılarda Bölme.....	32

3.3	Özel Bulanık Sayılar.....	35
3.3.1	L-R Bulanık Sayılar.....	35
3.3.2	Üçgensel (Tringular) Bulanık Sayılar.....	36
4.	BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA.....	38
4.1	Giriş.....	38
4.2	Bulanık Lineer Programlama Modelleri.....	40
4.2.1	Bulanık Kaynaklar İle Lineer Programlama Problemi.....	40
4.2.1.1	Verdegay'ın Yaklaşımı-Simetrik Olmayan Model.....	45
4.2.1.1a	Örnek 1: Knox Üretim-Karışım Seçme Problemi.....	46
4.2.1.1b	Örnek 2: Taşıma Problemi.....	50
4.2.1.2	Werners' in Yaklaşımı – Simetrik Olmayan Model.....	53
4.2.1.2a	Örnek : Knox Üretim-Karışım Seçme Problemi.....	54
4.2.2	Bulanık Kaynaklı ve Bulanık Amaçlı Lineer Programlama Problemi.....	57
4.2.2.1	Zimmermann' in Yaklaşımı – Simetrik Model.....	57
4.2.2.1a	Örnek : Knox Üretim-Karışım Seçme Problemi.....	60
4.2.2.2	Chanas' in Yaklaşımı – Simetrik Olmayan Model.....	61
4.2.2.2a	Örnek : Bir Optimal Sistem Dizayn Problemi.....	64
4.2.3	Amaç Fonksiyonunda Bulanık Parametrelili Lineer Programlama Problemi.....	67
4.2.4	Tüm Katsayıları Bulanık Olan Lineer Programlama.....	70
4.2.4.1	Örnek: Bir Üretim Programlama Problemi.....	72
5.	SONUÇLAR ve ÖNERİLER.....	77
	KAYNAKLAR.....	78
	ÖZGEÇMİŞ.....	79

## SİMGE LİSTESİ

$A$	Katsayılar matrisi
$\bar{A}$	A bulanık kümesinin tümleyeni (değili)
$ A $	A bulanık kümesinin kardinali
$  A  $	A bulanık kümesinin bağıl kardinalitesi
$b$	Mevcut toplam kaynakların matrisi
$\tilde{b}_i$	Bulanık toplam kaynakların matrisi
$c$	Amaç fonksiyonun kar katsayılarının matrisi
$\tilde{c}$	Bulanık kar katsayıları
$p_i$	$b_i$ nin maksimum toleransı
$x$	Karar değişkenlerin matrisi
$z$	Amaç fonksiyonu
$\mu_A(x)$	$x$ ' in A daki üyelik derecesi
$\Sigma$	Toplam sembolü
$\preceq$	Bulanık eşit veya daha küçük



## KISALTIMA LİSTESİ

BLP	Bulanık Lineer Programlama
BMP	Bulanık Matematiksel Programlama
KLP	Kesin Lineer Programlama
LP	Lineer Programlama
PLP	Possibilistik Lineer Programlama
STS	Sağ Taraf Sabiti



## ŞEKİL LİSTESİ

	Sayfa
Şekil 2.1	Sıcaklık grafiği..... 3
Şekil 2.2	Boy grafiği..... 4
Şekil 2.3	A ve B bulanık kümelerin birleşimi..... 6
Şekil 2.4	A ve B bulanık kümelerin kesişimi..... 6
Şekil 2.5	Örnek A bulanık kümesi..... 7
Şekil 2.6	A bulanık kümesinin tümleyeni..... 7
Şekil 2.7	Normal bulanık küme..... 12
Şekil 2.8	Normal olmayan bulanık küme..... 12
Şekil 2.9	Konveks bulanık küme..... 13
Şekil 2.10	Konveks olmayan bulanık küme..... 13
Şekil 3.1	Bir konveks ve normal bulanık küme..... 18
Şekil 3.2	İki bulanık sayının toplamı..... 20
Şekil 3.3	İki üçgen bulanık sayının toplamı..... 22
Şekil 3.4	İki üçgen bulanık sayının farkı..... 26
Şekil 3.5	İki bulanık sayının çarpımı..... 30
Şekil 3.6	İki bulanık sayının bölümü..... 35
Şekil 3.7	L-R bulanık sayılar..... 36
Şekil 3.8	Bir üçgen bulanık sayı A..... 37
Şekil 4.1	Bulanık kümeler C, G ve D arasındaki ilişki..... 39
Şekil 4.2	Lineer programlama problemi için grafik yaklaşımı..... 42
Şekil 4.3	Çalışma saatleri ve malzemelerin üyelik fonksiyonları..... 43
Şekil 4.4	Bulanık lineer programlama probleminin grafik çözümleri..... 43
Şekil 4.5	Z malzemesi ve işçi-gücü kısıtlarının üyelik fonksiyonları..... 48
Şekil 4.6	Üçgensel üyelik fonksiyonları..... 52
Şekil 4.7	Amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu..... 54
Şekil 4.8	Bulanık amaç kısıtı ve i-inci bulanık kısıtı için üyelik fonksiyonları..... 58
Şekil 4.9	$\mu_0$ ve $\mu_C$ 'nin kesişimi..... 62
Şekil 4.10	Chanas' ın yaklaşımının prosedür çözüm yolu (algoritması)..... 63
Şekil 4.11	Bulanık optimal sistem dizayn probleminin optimal çözümü..... 66
Şekil 4.12	Bulanık c kümesinin üyelik fonksiyonu..... 72
Şekil 4.13	Bulanık katsayıların üyelik fonksiyonları..... 73
Şekil 4.14	Optimal değerler ve onlara karşılık gelen üyelik dereceleri arasındaki ilişki..... 76

## ÇİZELGE LİSTESİ

	Sayfa
Çizelge 4.1 Malzeme ve çalışma saatlerinin üyelik fonksiyonları.....	42
Çizelge 4.2 Knox ürün-karışım seçim problemi için girdi bilgisi.....	47
Çizelge 4.3 Knox ürün-karışım seçim problemi için simpleks metodun sonuç tablosu.....	47
Çizelge 4.4 Knox ürün-karışım seçim problemi için simpleks metodun sonuç parametrik tablosu.....	49
Çizelge 4.5 Parametrik programlama probleminin çözümleri.....	50
Çizelge 4.6 Girdiler ve teknolojik katsayılar.....	64
Çizelge 4.7 Yüksek-verimlilik için bulanık çözüm ve kesin çözümün karşılaştırılması...	67
Çizelge 4.8 BLP' nin mutlak takas modeli için optimal çözümü.....	75



## ÖNSÖZ

Çalışmam boyunca, tezimi yöneten ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Yrd. Doç. Dr. Nuran GÜZEL' e teşekkürü borç bilirim. Ayrıca tez süresince çalışmalarında yardımlarını gördüğüm Sayın Araştırma Görevlisi B.Ali ERSOY' a ve Sayın İlker UYANIKER' e teşekkür ederim.

Mustafa TAŞTAN  
İstanbul





## ÖZET

Bu tezde; bulanık kümeler, bulanık sayılar ve bulanık matematiksel programlama konuları ele alınmıştır.

İkinci bölümde, bulanık kümelerle ilgili temel kavram ve tanımlamalar incelenmiştir. Bazı bulanık küme özellikleri ile ilgili örnekler verilmiştir.

Üçüncü bölümde, bulanık sayılarla ilgili temel tanımlar ve genel özellikler verilmiştir. Ayrıca bulanık sayılarda aritmetik işlemlerle ilgili örnekler verilmiştir.

Dördüncü bölümde, bulanık matematiksel programlama konusu işlenmiştir. Genel olarak bulanık lineer programlama modelleri işlenmiştir ve bu modellerle ilgili Verdegay, Werners, Zimmermann ve Chanas'ın yaklaşımlarına yer verilmiştir. Bu yaklaşımlarla ilgili ayrı ayrı örnekler verilmiştir.

**Anahtar Kelimeler:** Bulanık kümeler, bulanık sayılar, bulanık lineer programlama, bulanık matematiksel programlama, lineer programlama.



## ABSTRACT

In this thesis, fuzzy sets, fuzzy numbers and fuzzy mathematical programming were dealt with.

In the section two, basic concepts and definitions concerning fuzzy sets were studied. Some examples concerning of fuzzy sets were given.

In the section three, basic definitions and general features concerning fuzzy numbers were given. In addition, some examples in fuzzy numbers concerning arithmetic operation were given.

In the section four, fuzzy mathematical programming is explained with fuzzy linear programming models which are described according to Verdegay, Werners, Zimmermann and Chanas' s approaches individually with many given examples.

**Keywords:** Fuzzy sets, fuzzy numbers, fuzzy linear programming, fuzzy mathematical programming, linear programming.



## 1. GİRİŞ

Yeryüzünde yaşanan olayların bir çoğunda bir belirsizlik (bulanıklık, müphemlik) durumu söz konusudur. Özellikle günümüzde ilişkiler, oldukça gelişmiş ve bununla beraber oldukça da karmaşık bir hal almıştır. Burada sözünü ettiğimiz ilişkiler; insanların karşılıklı ikili ilişkilerinden, toplumların ekonomik, siyasal vb. tüm ilişkilerine ve ayrıca tabiatın kendi içindeki doğal ilişkilerine kadar olanları kapsamaktadır. Bilim adamları ise dünya üzerinde hatta evrende olup biten her türlü olayla ilgilenmektedirler. Onlar için iki dünya söz konusudur; biri gerçek dünya diğeri kendi geliştirdikleri varsayımlar, teoremler çevresindeki bilimsel dünya. Amaç, bilimsel dünya üzerinde çalışmalar yaparak gerçek dünyayı anlayabilmektir. Günümüzde bu amaca bir adım daha yaklaşmıştır.

Geçmişe nazaran günümüzde bilgiler bir yerden başka bir yere oldukça hızlı bir şekilde iletilebilmektedir. Bunun sonucu olarak belirsizlik durumları gittikçe azalmaktadır. Elde edilen bilginin en kısa zamanda, tam ve doğru olarak iletilmesi, belirsizlik durumlarının ortadan kalkmasında en önemli etkidir.

Bizim problemimiz, matematiksel ve karar verme modelleri gibi karmaşık konulardaki belirsizliği incelemek ve ortadan kaldırmaya çalışmaktır. Bu amaç doğrultusunda öncelikle belirsizliğin incelenmesi gerekmektedir. Elimizdeki bilgiyi iyi bir şekilde analiz edebilirsek belirsizlik gittikçe azalacaktır.

Bu amaçlara yönelik olarak ilk kez, 1965 yılında University of California, Berkeley' de Elektrik Mühendisliği başkanı olan Azeri asıllı Lotfi A. Zadeh "Fuzzy Sets" başlıklı makalesini "Information and Control" adlı dergide yayınlamasıyla Bulanık (Fuzzy) Küme teorisinin başlangıcını yapmış oldu. Bulanık Küme teorisi; yöneylem araştırması, yönetim bilimi, yapay zeka uygulamaları, sanayideki bulanık denetim, uzman sistemler, üretim planlaması, belirsizlik ortamında karar verme, dilsel (linguistic) verilerin değerlendirilmesi, kontrol teorisi ve özellikle teknolojide uygulanmaya başlamıştır. Her geçen gün birçok alanda kendisine kullanım olanağı bulan Bulanık Kümeler kuramı; belirsiz, kesin olmayan bulanık gözlemler ve kavramlara ait problemlerin çözümünde kullanılmaktadır.

Matematiksel programlamada, bir gerçek problem matematiksel modellerle ifade edilir. Şayet bir model, kısıtları olmayan gerçek bir probleme yaklaşırsa, model karmaşık bir model olur ve çözümü bulmak güçleşir. Ayrıca çelişkili sonuçlar ortaya çıkar. Örnek verecek olursak, belirsizlik ifade edilirken "yaklaşık hava sıcaklığı X tir" veya

“bugün hava Y civarında olacaktır” ifadeleri bir çeşit belirsizlik, müphemlik içerir. Bulanık Matematiksel Programlama (BMP), bu tür belirsizlikleri bulanık kümelerdeki terimlerle ifade eder ve kavrayışımıza yakın hale getirir.

Genel (klasik) matematiksel programlama problemlerinde, kısıtlamalara bağlı olan maksimize edilmiş bir amaç fonksiyonun çözümü bulunur. Gerçek problemlerde ise nesnelardaki kısıtlar ve amaç fonksiyonları esnek olarak ele alınabilir. Bulanık Lineer Programlama (BLP), klasik lineer programlamanın yetersiz kaldığı durumlardan ötürü ortaya çıkmıştır. Bir lineer programlama modeli şu şekilde ifade edilir:

$$\text{maksimum } z = c x$$

$$A x \leq b \tag{1.1}$$

$$x \geq 0$$

Burada c: Amaç fonksiyonun kar katsayılarının vektörü,

x: Karar değişkenlerin vektörü,

b: Mevcut toplam kaynakların vektörü,

A: Katsayılar matrisidir.

### 1.1 Bulanık Matematiksel Programlamanın Uygulama Alanları

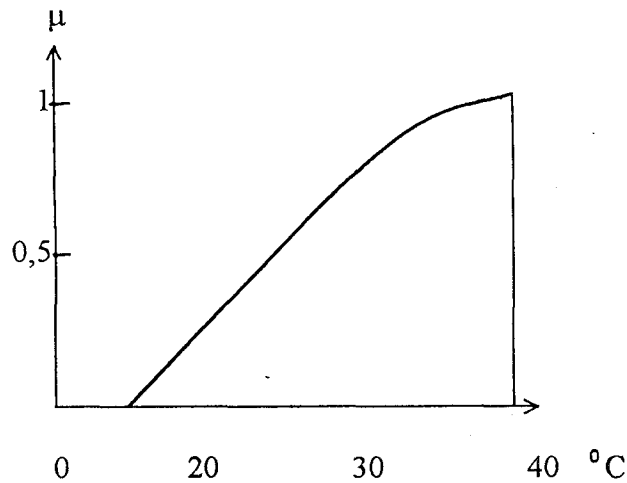
BMP' nin pratik hayatta en çok uygulandığı alanlar; üretim ve imalat planları, nakil ve taşımacılık, atama ve görev verme, oyun, çevresel yönetim, bankacılık ve finans, tarım ekonomileri olarak sayabiliriz.

## 2. BULANIK KÜMELER ( FUZZY SETS )

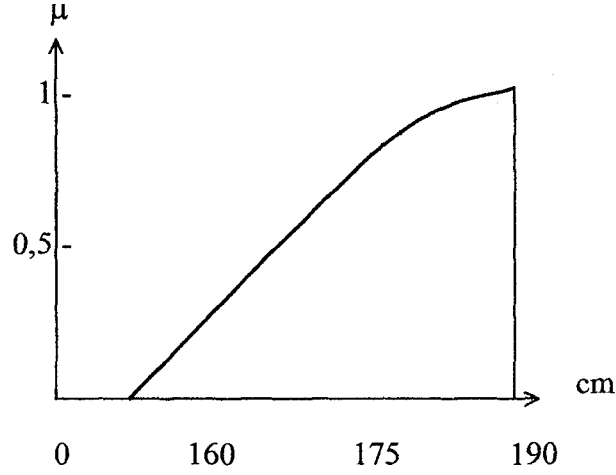
### 2.1 Giriş

Belirsizlik durumlarının ortaya çıkardığı olaylarla gerçek dünyada uğraşabilen tek varlık insandır. Nesnelere ait sıfatlar ve nitelendirmeler yeterince kesin değildir ve anlam genişliği bakımından belirsizdirler. İnsan beyni; “ılık hava”, “güzel kadın”, “yüksek hız” veya “uzun insan” gibi belirsizlik ya da kişilere göre değişen yargılar içeren bulanık anlatım ve iddiaların üstesinden gelebilecek biçimde akıl yürütebilme özelliğine sahiptir. Örneğin “ılık hava” dediğimizde, hava sıcaklığının yüksek ya da düşük olduğuna kesin bir şekilde karar veremeyiz. “Uzun insan” nitelemesinde ise belirsizlik uzun sıfatından kaynaklanmaktadır. İlık ve uzun nitelendirmeleri, ılıkılık ve uzunluk miktarından anlaşılmaktadır. Eğer belirsizlik içeren bu ve benzeri nitelendirmeler kullanılmaz ise, sıfatlar genelde miktar içerirler. Miktarların belirtilmesi de özellikle mühendislik alanında gereklidir.

$X [^{\circ}\text{C}]$ ,  $10^{\circ}\text{C} - 40^{\circ}\text{C}$  arasındaki sıcaklık miktarını gösteren bir dizi olsun.  $X [^{\circ}\text{C}]$  dizisinin her bir elemanı  $0 \leq \mu \leq 1$  aralığında derecelendirilirse bu dizinin elemanlarından her biri derece  $\mu$ 'ye karşılık gelir. Şekil 2.1'de yatay eksendeki değerler sıcaklık miktarlarını, düşey eksende yer alan değerler ise  $\mu$  değerlerini gösterir. Bu şekil sıcaklık miktarındaki belirsizliğin grafiğidir. Şekil 2.2' de ise boyla ilgili belirsizliğin grafiği gösterilmiştir. Bu grafikte yatay eksen boy miktarını, düşey eksende herhangi bir insana ait uzunluk derecesini göstermektedir.



Şekil 2.1 Sıcaklık grafiği



Şekil 2.2 Boy grafiği

## 2.2 Bulanık Alt Küme

$X$  bir evrensel küme olsun. Bir  $A \subset X$  kümesini ele alalım.  $\mu: X \rightarrow [0,1]$  şeklinde bir dönüşüm olmak üzere;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & ; x \in A \\ 0 & ; x \notin A \end{cases}$$

olarak tanımlansın. Bu dönüşüme  $A$  nın karakteristik ya da üyelik fonksiyonu denir. Bu durumda  $\mu_A(x)$ ,  $x$ ' in  $A$  daki üyelik derecesini verir. Herhangi bir  $A$  kümesinden  $[0,1]$  aralığına tanımlanan her bir dönüşüme  $A$  nın bir Bulanık Alt Kümesi denir. (Zadeh, 1965)

## 2.3 Bulanık Küme

$X$  bir evrensel küme olsun.  $x$  ise bu evrensel kümenin bir elemanı olsun. Bu durumda  $X = \{x\}$ ' tir. Evrensel küme  $X$ ' in bir bulanık alt kümesi olan  $A$ ,  $X$ ' deki her bir elemanı birbirine bağlayan  $[0,1]$  aralığında bir reel sayı olan üyelik fonksiyonu  $\mu_A(x)$  yardımıyla tanımlanır (Chen ve Hwang, 1992).

$A$  bulanık kümesi aşağıdaki şekilde tanımlanır (Evans vd., 1989).

$$A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\} \quad (2.1)$$

Bu tanımlardan şu temel bilgi ortaya çıkmaktadır: bulanık küme kuramı esas olarak klasik küme kuramının genelleştirilmiş şeklidir. Daha açık olarak bulanık küme kuramındaki tanımlar, teoremler ve ispatlar bulanık olmayan kümeler için de doğrudur.

O taktirde  $X$ ' deki bir  $A$  bulanık kümesi  $A = \{(x, \mu_A(x)), x \in X\}$  sıralı ikililerin bir kümesidir.

$\mu_A(x)$ ,  $[0,1]$  aralığında reel bir sayıdır.  $\mu_A(x)$ ' in değeri 1' e yaklaştıkça  $x$ ' in  $A$  bulanık kümesindeki üyeliği artar. Her ögenin bir kümeye üyeliği bulanıklık derecesi ile atanır. Bulanıklık derecesi kişilere göre öznel (subjektif) veya bir tanımlama işlevi olarak verilir. Ölçme kuramı belirtilerine dayanarak subjektif verilerin bulanıklık derecesinin ölçü niteliği belirlenir.

### Tanım 2.1

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme olsun.  $X$ ' deki bir bulanık küme şöyle tanımlanır:

$$\begin{aligned} A &= \mu_A(x_1)/x_1 + \mu_A(x_2)/x_2 + \dots + \mu_A(x_n)/x_n \\ &= \sum_{i=1}^n \mu_A(x_i)/x_i \end{aligned} \quad (2.2)$$

### Tanım 2.2

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$  sonlu bir küme değil de sonsuz olursa, buna ait bir bulanık küme aşağıdaki şekilde ifade edilebilir (Klir ve Folger, 1988).

$$A = \int_X \mu_A(x)/x \quad (2.3)$$

(2.2) ve (2.3) eşitliklerindeki “/” sembolü “ayırac” olarak adlandırılır. Ayıracın sağına evrensel kümenin bir elemanı ve soluna da ilgili elemanın tanımı yapılan kümeye üyelik derecesi yazılır. Diğer elemanlarda aynı şekilde yazılıp “+” işaretiyle birbirlerine bağlanır. Normalde matematikte “/” ve “+” sırasıyla bölme ve toplama anlamına gelir fakat bulanık kümeleri tanımlarken bu işaretler farklı anlamlarda kullanılırlar. Sonlu ifadeleri bir araya toplarken  $\sum$  kullanılır ki buradaki anlamı yine normal anlamından farklıdır. Sürekli ifadelerde kullanılan  $\int$  sembolü ise  $\sum$  nın sürekli evrene taşınmasıdır ve integrale karıştırılmamalıdır.

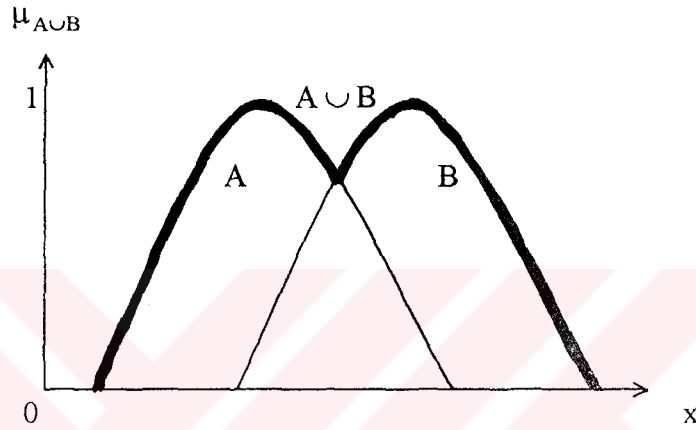
## 2.4 Bulanık Kümelerde Temel İşlemler

### 2.4.1 Birleşim

Bulanık kümede üyelik fonksiyon tanımlı olduğundan A ve B bulanık kümelerin birleşimi  $A \cup B$  dir. Birleşimin üyelik fonksiyonu da;

$$\mu_{A \cup B}(x) = \mu_A(x) \vee \mu_B(x) = \max\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.4)$$

şeklinde tanımlanır.



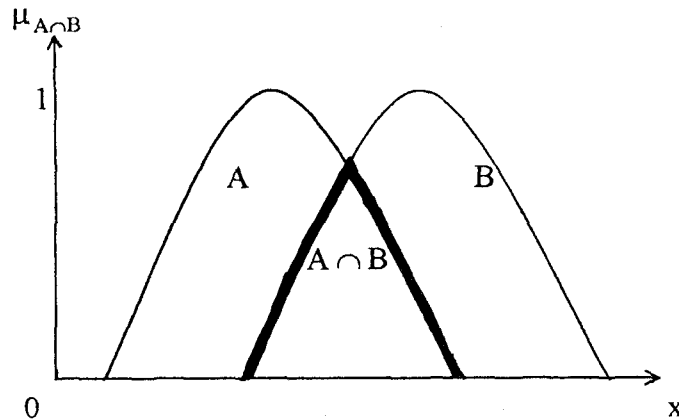
Şekil 2.3 A ve B bulanık kümelerin birleşimi

### 2.4.2 Kesişim

A ve B bulanık kümelerin kesişimi  $A \cap B$  dir. Kesişimin üyelik fonksiyonu da;

$$\mu_{A \cap B}(x) = \mu_A(x) \wedge \mu_B(x) = \min\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} \quad (2.5)$$

şeklinde tanımlanır.



Şekil 2.4 A ve B bulanık kümelerin kesişimi



### Örnek 2.1

$X = \{\text{Burak, Ercan, Hasan, Kemal, Faruk}\}$  kümesi verilmiş olsun. A “çalışkan işçilerin” B’ de “yakışıklı işçilerin” alt kümesi olsun.

$$A = 0.2/\text{Burak} + 0.6/\text{Ercan} + 0.3/\text{Hasan} + 0.7/\text{Kemal} + 0.4/\text{Faruk}$$

$$B = 0.7/\text{Burak} + 0.5/\text{Ercan} + 0.6/\text{Hasan} + 0.8/\text{Kemal} + 0.3/\text{Faruk}$$

A ve B’ nin birleşimi;

$A \cup B = 0.7/\text{Burak} + 0.6/\text{Ercan} + 0.6/\text{Hasan} + 0.8/\text{Kemal} + 0.4/\text{Faruk}$  kümesidir ve bu küme “çalışkan” veya “yakışıklı” işçilerin bulanık alt kümesidir.

A ve B’ nin kesişimi ise;

$$A \cap B = 0.2/\text{Burak} + 0.5/\text{Ercan} + 0.3/\text{Hasan} + 0.7/\text{Kemal} + 0.3/\text{Faruk} \text{ kümesidir.}$$

### 2.4.3 Tümlleme – Değilleme (Dışında Tutma)

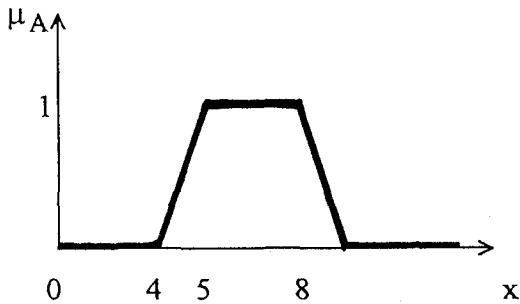
Bir A bulanık kümesinin tümleneni  $\bar{A}$  ile gösterilir ve  $\bar{A}$ ’ nin üyelik fonksiyonu:

$$\forall x \in X, \quad \mu_{\bar{A}}(x) = 1 - \mu_A(x) \quad (2.6)$$

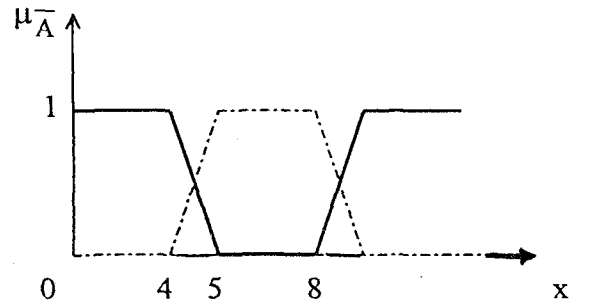
şeklinde tanımlanır.

### Örnek 2.2

Aşağıda şekilde verilen A bulanık kümesinin tümleneni olan  $\bar{A}$  bulanık kümesini gösterelim.



Şekil 2.5 Örnek A bulanık kümesi



Şekil 2.6 A bulanık kümesinin tümleneni

### Örnek 2.3

Uzun bir aralıkta seyir halindeki otomobillerin muhtemel hızlarının (mph) kümesi ,

$X = \{10,20,30,40,50,60,70,80,90,100\}$  olsun. Bir kişi tarafından “uzun bir yolculuk için en uygun hız” bulanık kümesi aşağıdaki gibi tanımlansın,

$$A = \{(30,0.7), (40,0.75), (50,0.8), (60,0.8), (70,1), (80,0.8), (90,0.3)\}$$

Dikkat edilirse A kümesinde  $x = 10, 20, 100$  hızları yer almamaktadır. Bu hızlar uzun bir yolculuk için kabul edilebilir uygunlukta olmayan hızlar olarak kabul edilebilir. Dolayısıyla bu hızların üyelik dereceleri sıfır olmaktadır.

Bu örnekte A, “uzun bir yolculuk için en uygun hız” bulanık kümesinin tümleyeni olan  $\bar{A}$  ;

$$\bar{A} = \{(10,1), (20,1), (30,0.3), (40,0.25), (50,0.2), (60,0.2), (80,0.2), (90,0.7), (100,1)\} \text{ dir.}$$

#### 2.4.4 Eşitlik

$$\forall x \in X, \quad A = B \quad \leftrightarrow \quad \mu_A(x) = \mu_B(x) \quad (2.7)$$

#### 2.4.5 Kapsama

$$\forall x \in X, \quad A \supset B \quad \leftrightarrow \quad \mu_A(x) \geq \mu_B(x) \quad (2.8)$$

### Örnek 2.4

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ , A ve B bulanık kümeleri aşağıdaki gibi verilsin.

$$A = \{0.4/1 + 0.7/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 0.9/5\}$$

$$B = \{0.1/1 + 0.1/2 + 0.5/3 + 0.7/4 + 0.4/5\}$$

Verilenlere göre  $0.4 > 0.1$ ,  $0.7 > 0.1$ ,  $0.5 = 0.5$ ,  $0.8 > 0.7$ ,  $0.9 > 0.4$  dir.

Burada A bulanık kümesinin tüm üyeliklerinin B bulanık kümesinin tüm üyeliklerinden büyük ya da eşit olduğu görülmektedir. Dolayısıyla A kümesi B kümesini kapsar. Yani  $A \supset B$  dir.

### 2.4.6 Fark İşlemi

$$A - B = (A \setminus B) = (A \cap \bar{B}) \quad (2.9)$$

$$B - A = (B \setminus A) = (B \cap \bar{A}) \quad (2.10)$$

### Örnek 2.5

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ , A ve B bulanık kümeleri aşağıdaki gibi olsun.

$$A = \{0.2/1 + 0.3/2 + 0.5/3 + 0.9/4 + 1/5\} \text{ ve}$$

$$B = \{0.3/4 + 0.6/5 + 0.7/6 + 0.1/7\}$$

Bu iki bulanık kümeye fark işlemlerini uygulayarak  $A - B$  ve  $B - A$ 'yı bulalım. Öncelikle bu kümelerin tümleyenlerini yazalım;

$$\bar{A} = \{1/0 + 0.8/1 + 0.7/2 + 0.5/3 + 0.1/4 + 0/5 + 1/6 + 1/7 + 1/8 + 1/9\}$$

$$\bar{B} = \{1/1 + 1/2 + 1/3 + 0.7/4 + 0.4/5 + 0.3/6 + 0.9/7 + 1/8 + 1/9\}$$

$$A - B = (A \cap \bar{B}) = \{0.2/1 + 0.3/2 + 0.5/3 + 0.7/4 + 0.4/5\}$$

$$B - A = (B \cap \bar{A}) = \{0.1/4 + 0/5 + 0.7/6 + 0.1/7\} \text{ olarak bulunur.}$$

Görüldüğü gibi  $A - B \neq B - A$  dır.

### 2.4.7 Cebirsel Çarpım

$$A \cdot B \leftrightarrow \mu_{A \cdot B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (2.11)$$

### 2.4.8 Sınırlı Çarpım

$$A \otimes B \leftrightarrow \mu_{A \otimes B}(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x) - 1) \vee 0 \quad (2.12)$$

### 2.4.9 Cebirsel Toplam

$$A + B \leftrightarrow \mu_{A+B}(x) = \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \quad (2.13)$$

### 2.4.10 Sınırlı Toplam

$$A \oplus B \leftrightarrow \mu_{A \oplus B}(x) = (\mu_A(x) + \mu_B(x)) \wedge 1 \quad (2.14)$$

### 2.4.11 Sınırlı Fark

$$A \ominus B \leftrightarrow \mu_{A \ominus B}(x) = (\mu_A(x) - \mu_B(x)) \vee 0 \quad (2.15)$$

### Örnek 2.6

$X = \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$ , A ve B bulanık kümeleri aşağıdaki gibi verilsin;

$A = \{0/4 + 0.2/5 + 0.4/6 + 0.6/7 + 0.8/8 + 1/9 + 0/10\}$  ve

$B = \{0/3 + 0.5/4 + 0.7/5 + 1/6 + 0.4/7 + 0.5/8 + 0/9\}$

x	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A(x)$	0	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	0
$\mu_B(x)$	0	0.5	0.7	1	0.4	0.5	0	0
$\min(\mu_A(x), \mu_B(x))$	0	0	0.2	0.4	0.4	0.5	0	0
$\max(\mu_A(x), \mu_B(x))$	0	0.5	0.7	1	0.6	0.8	1	0
$\mu_{A \cdot B}(x)$	0	0	0.14	0.4	0.24	0.4	0	0
$\mu_{A \oplus B}(x)$	0	0	0	0.4	0	0.3	0	0
$\mu_{A+B}(x)$	0	0.5	0.76	1	0.76	0.9	1	0
$\mu_{A \ominus B}(x)$	0	0.5	0.9	1	1	1	1	0
$\mu_{A \ominus B}(x)$	0	0	0	0	0.2	0.3	1	0

Örnek olarak  $x = 7$  yi ele alacak olursak buna göre,

$$\min(\mu_A(7), \mu_B(7)) = 0.4,$$

$$\max(\mu_A(7), \mu_B(7)) = 0.6,$$

$$\mu_{A \cdot B}(7) = \mu_A(7) \cdot \mu_B(7) = 0.24,$$

$$\mu_{A \oplus B}(7) = \max(0, \mu_A(7) + \mu_B(7) - 1) = \max(0, 0) = 0,$$

$$\mu_{A+B}(7) = \mu_A(7) + \mu_B(7) - \mu_A(7)\mu_B(7) = 0.6 + 0.4 - 0.6 \cdot 0.4 = 1 - 0.24 = 0.76 ,$$

$$\mu_{A \oplus B}(7) = \min(1, \mu_A(7) + \mu_B(7)) = \min(1, 1) = 1 ,$$

$$\mu_{A \ominus B}(7) = \max(0, \mu_A(7) - \mu_B(7)) = \max(0, 0.2) = 0.2$$

değerleri hesaplanacaktır.

### 2.4.12 Diğer Özellikler

X evreninin bulanık alt kümeleri A, B ve C olmak üzere yani  $(A, B, C \subset X)$ ;

$$\left. \begin{array}{l} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{array} \right\} \text{Değişme (Change)} \quad (2.16)$$

$$\left. \begin{array}{l} (A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C) \\ (A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C) \end{array} \right\} \text{Birleşme (Associativity)} \quad (2.17)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup A = A \\ A \cap A = A \end{array} \right\} \text{Denk güçlülük (Idempotency)} \quad (2.18)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{array} \right\} \text{Dağılma (Distributiviy)} \quad (2.19)$$

$$\left. \begin{array}{l} A \cup X = X \quad A \cap X = A \\ A \cup \emptyset = \emptyset \quad A \cap \emptyset = \emptyset \end{array} \right\} \text{Birim eleman (Identity)} \quad (2.20)$$

$$\left. \begin{array}{l} \overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{array} \right\} \text{De Morgan kuralı} \quad (2.21)$$

$$\overline{\overline{A}} = A \text{ değilinin değil kendisidir.} \quad \text{Çift değilleme kuralı (Involution)} \quad (2.22)$$

$$A \subseteq B \subseteq C \text{ ise o zaman } A \subseteq C \quad \text{Geçişlilik (Transitivity)} \quad (2.23)$$

$$A \subseteq B \text{ ise o zaman } A \cup C \subseteq B \cup C \quad \text{Monotonluk (Monotonicity)} \quad (2.24)$$

$$A \cup \overline{A} \neq X \quad \text{Keskin kümeler için eşit olan bu özellikler bulanık} \quad (2.25)$$

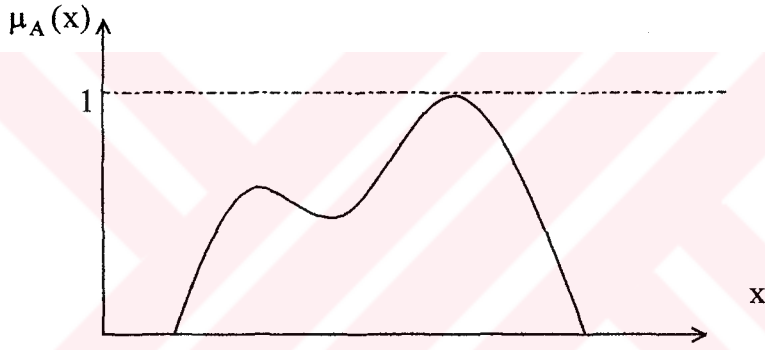
$$A \cap \overline{A} \neq \emptyset \quad \text{kümeler için bu şekildedir.}$$

## 2.5 Bulanık Kümelerde Temel Kavramlar

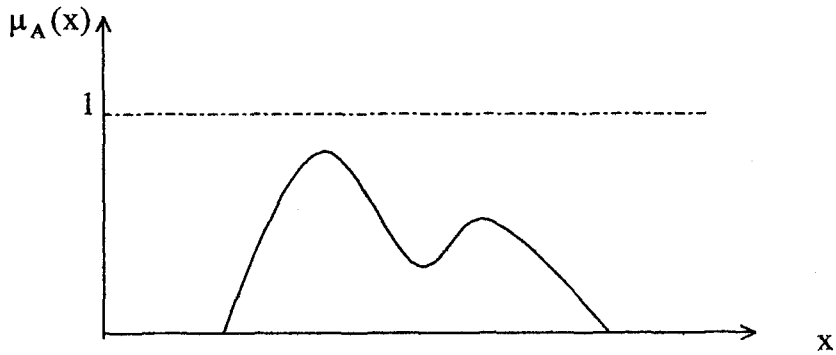
Bir bulanık kümede keskin kümelerde bulunmayan bazı kavramlar vardır. Bunlar; bulanık kümenin normallığı (normality), konveksliği (convexity), desteği (support),  $\alpha$ -kesiti ( $\alpha$ -cut), kardinalitesi (cardinality) ve m. kuvveti ( $m^{\text{th}}$  power) adı altında açıklanacaktır.

### 2.5.1 Bulanık Kümenin Normallığı

Bir A bulanık kümesinin normal olabilmesi için en az bir x değerinin 1 olması gerekir. Yani  $\mu_A(x)=1$  ise normaldir veya  $\mu_A(x)$ ' in en büyük değeri (yüksekliği) 1' e eşitse A bir normal bulanık kümedir. Şayet yüksekliği 1' den küçük ise bu bulanık küme normal olmayan küme adını alır (Kaufmann ve Gupta, 1991).



Şekil 2.7 Normal bulanık küme



Şekil 2.8 Normal olmayan bulanık küme

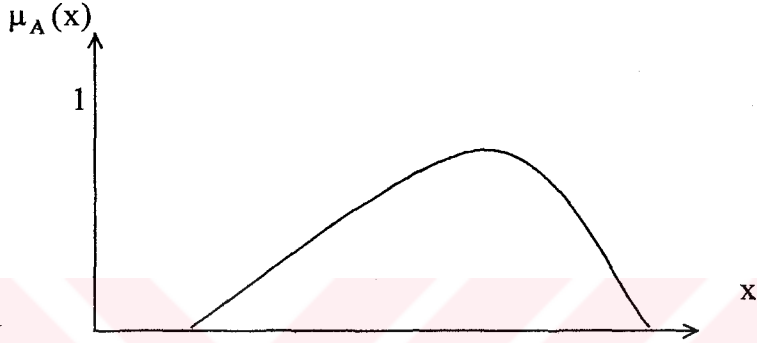
### 2.5.2 Bulanık Kümenin Konveksliği

A bulanık kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul;

$$\forall x_1, x_2 \in X \text{ ve } \forall \lambda \in [0,1],$$

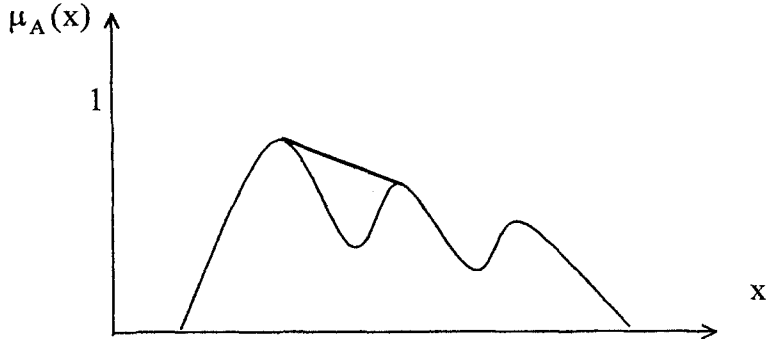
$$\mu_A[\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2] \geq \min [\mu_A(x_1), \mu_A(x_2)] \quad (2.26)$$

olmasıdır (Kaufmann ve Gupta, 1991).



Şekil 2.9 Konveks bulanık küme

Şekil üzerinde herhangi iki nokta birleştirildiğinde doğru bölge dışına çıkıyorsa o bulanık küme konveks değildir (nonconvex) (Mansur, 1995).



Şekil 2.10 Konveks olmayan bulanık küme

### 2.5.3 Bulanık Kümenin Desteği

$X'$  deki  $\mu_A(x) > 0$  noktalarının oluşturduğu kümeye  $A$  bulanık kümesinin desteği denir.  $X'$  in kesin bir alt kümesi olan bu küme,

$$\text{Supp}(A) = \{x \in X \mid \mu_A(x) > 0\} \quad (2.27)$$

ile gösterilir.  $\mu_A(x) = 0.5$  değerine sahip  $x$  elemanları  $A$  bulanık kümesinin köprü (crossover) noktalarıdır.  $A'$  nin yüksekliği ise,  $A'$  nin üyeliği en üst olan noktasını tanımlar. Diğer bir ifadeyle,  $A'$  nin yüksekliği en küçük üst sınırla (supremum) belirlenir.

### 2.5.4 Bulanık Kümenin $\alpha$ – Kesiti

$A$  bulanık kümesinin  $\alpha$  – kesiti  $A'$  ya ait elemanların (en az  $\alpha$  derecesine kadar olanların) bir sıralı kümesidir. Buna göre,  $A$  bulanık kümesinin  $\alpha$  – kesiti;

$$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (2.28)$$

şeklinde tanımlanır.  $\alpha$  – kesiti, bir bulanık kümenin desteğinin daha genelleştirilmiş bir şeklidir.  $\alpha = 0$  için  $A_\alpha = \text{Supp}(A)$ ' dir.

### Örnek 2.7

$X = \{a, b, c, d, e, f\}$  ve  $A$  bulanık kümesi aşağıdaki gibi verilmiş olsun;

$$A = \{1/a + 0.8/b + 0.5/c + 0.2/d + 0.04/e + 0/f\}$$

$(A_\alpha) \Rightarrow A_1 = \{a\}$  Üyelik değeri 1 olan elemanların kümesi

$A_{0.8} = \{a, b\}$  Üyelik değeri 0.8 ve daha büyük olan elemanların kümesi

$A_{0.5} = \{a, b, c\}$  Üyelik değeri 0.5 ve daha büyük olan elemanların kümesi

$A_{0.2} = \{a, b, c, d\}$  Üyelik değeri 0.2 ve daha büyük olan elemanların kümesi

$A_{0+} = \{a, b, c, d, e\}$  Üyelik değeri 0 ve daha büyük olan elemanların kümesi

$\alpha = 0+$  verilmiş ise değeri en küçük pozitif reel sayı olmaktadır. 0' dan büyük en küçük reel sayı  $0+$  olarak gösterilir.



### Örnek 2.8

Örnek 2.3' e tekrar bir göz atacak olursak burada A bulanık kümesinin desteği,

$\mu_A(x) > 0$  için bütün x' lerin kümesidir. Yani,

$\text{Supp}(A) = \{30,40,50,60,70,80,90\}$  şeklindedir.

$\alpha = 0.5$  alacak olursak bu durumda,

$A_{0,5} = \{30,40,50,60,70,80\}$  olacaktır.

x = 90 elemanı  $\mu_A(90) < 0.5$  olduğundan bu kümeye ait olamayacaktır.

Eğer  $\alpha = 0.9$  olarak alınmış olsaydı  $A_{0,9} = \{70\}$  olacaktı.

### 2.5.5 Bulanık Kümenin Kardinali

Bir A bulanık kümesinin kardinali, A' nın özelliklerine sahip X' deki elemanların miktarını göstermekte olup;

$$\text{Kardinalite } X \text{ sonlu ise; } |A| = \sum_x \mu_A(x), x \in X \quad (2.29)$$

$$X \text{ sonsuz ise; } |A| = \int_x \mu_A(x) dx \quad (2.30)$$

şeklinde tanımlanır (Chen ve Hwang, 1992).

A' nın bağıl kardinalitesi (relative cardinalty) ise, A' da ağırlıkları üyelik dereceleri ile verilen A' ya ait X' deki elemanların oranı olarak ifade edilebilir ve,

$$\|A\| = \frac{|A|}{|X|} \text{ şeklinde tanımlanır (Chen ve Hwang, 1992).} \quad (2.31)$$

### Örnek 2.9

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  ve  $A = \{0.4/1 + 0.1/2 + 0.5/3 + 0.8/4 + 1/5\}$  olarak verilsin.

A bulanık kümesinin kardinalitesini  $|A|$  ve bağıl kardinalitesini  $\|A\|$  bulalım;

$$|A| = 0.4 + 0.1 + 0.5 + 0.8 + 1 = 2.8 \quad \|A\| = \frac{2.8}{10} = 0.28$$

### 2.5.6 Bulanık Kümenin M. Kuvveti

Bulanık kümelerin m. kuvveti L.A. Zadeh tarafından aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$\mu_A^m = [\mu_A]^m \quad (2.32)$$

#### Örnek 2.10

$X = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$  ve  $A = \{0.6/1 + 0.3/2 + 0.4/3 + 0.7/4 + 1/5\}$  olarak verilsin.

x	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\mu_A$	0	0.6	0.3	0.4	0.7	1	0	0	0	0	0
$(\mu_A)^2$	0	0.36	0.09	0.16	0.49	1	0	0	0	0	0

Örnek olarak  $x = 3$  için;

$$\mu_A^2(3) = [\mu_A(3)]^2 = 0.16 \text{ 'dir.}$$

### 2.6 Uzanım-Genişleme Prensibi

Bulanık küme teorisinin temel kavramlarından biri, bulanık olmayan matematiksel kavramların bulanık durumlara bir genel genişlemesi olarak verilen, genişleme (extension) kuralıdır (Kandel, 1986). Bu kural bir ilişki tanımına göre  $X'$  deki noktalardan  $X'$  in bir bulanık alt kümesine genişletilmesine olanak veren temel bir özdeşliktir.

$f$ ,  $X'$  ten  $Y'$  ye bir gönderim ve  $A$ ,  $X'$  in bir bulanık alt kümesi olmak üzere,

$$A = \mu_1/x_1 + \mu_2/x_2 + \dots + \mu_n/x_n, \quad A' \text{ nin } f \text{ altındaki görüntüsü } f(A);$$

$$f(A) = f(\mu_1/x_1 + \dots + \mu_n/x_n) \equiv \mu_1/f(x_1) + \dots + \mu_n/f(x_n) \text{ dir.}$$

$f$  n-li fonksiyonu,  $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$  kartezyen çarpımından  $Y$  evrenine bir gönderim, yani  $y = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$  ve  $A_1, A_2, \dots, A_n$  kümeleri,

$X_1, X_2, \dots, X_n$  deki n tane bulanık küme,  $\{\mu_{A_i}(x_i)\}_{i=1}^n$  ler üyelik fonksiyonu olduğu zaman, uzanım prensibi n tane bulanık kümeden  $\{A_i\}_{i=1}^n$ ,  $Y'$  de bir  $F$  bulanık kümesinin tümevarımına neden olur ve aşağıdaki şekilde ifade edilir.

$$\mu_F(y) = \sup_{\substack{x_1, \dots, x_n \\ y=f(x_1, \dots, x_n)}} \min [\mu_{A_1}(x_1), \dots, \mu_{A_n}(x_n)], \quad (2.33)$$

$$f^{-1}(y) = \emptyset \Rightarrow \mu_F(y) = 0$$

### Örnek 2.11

\* , Y' deki  $X_1 \times X_2$  in değerleri ile tanımlı ikili işlem olsun.  $A_1$  ve  $A_2$  bulanık alt kümeleri ;

$$A_1 = \mu_{A_{11}}/x_{11} + \dots + \mu_{A_{1n}}/x_{1n} \quad \text{ve} \quad A_2 = \mu_{A_{21}}/x_{11} + \dots + \mu_{A_{2n}}/x_{2n}$$

\* işlemi ile,  $X_1$  ve  $X_2$  nin bulanık alt kümelerine genişletilmesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır;

$$A_1 * A_2 = \left( \sum_i \mu_{A_{1i}}/x_{1i} \right) * \left( \sum_j \mu_{A_{2j}}/x_{2j} \right) = \sum_{i,j} (\mu_{A_{1i}} \wedge \mu_{A_{2j}})/(x_{1i} * x_{2j}) \quad (2.34)$$

$X_1 = X_2 = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$ ,  $A_1 = 3$  ün  $A_2 = 5$  in yaklaşık değerler kümesi olsun.

$$A_1 = 0.4/2 + 0.8/3 + 1/4, \quad A_2 = 0.7/4 + 1/5 + 0.9/6$$

$A_1$  ve  $A_2$  nin aritmetik çarpımı :

$$A_1 * A_2 = (0.4/2 + 0.8/3 + 1/4) \times (0.7/4 + 1/5 + 0.9/6)$$

$$= 0.4/8 + 0.4/10 + 0.4/12 + 0.7/12 + 0.8/15 + 0.8/18 + 0.7/16 + 1/20 + 0.9/24$$

### 3. BULANIK SAYILAR ( FUZZY NUMBERS )

#### 3.1 Giriş

Bulanık sayılar bulanık kümelerin özel bir formudur ve gerçekte sayıların uzayında tanımlanmış olan bulanık kümelerdir (Pedrycz, 1989).

#### Tanım 3.1

Bir bulanık sayı aşağıdaki şartları sağladığında  $R'$  de tanımlı bir bulanık kümedir;

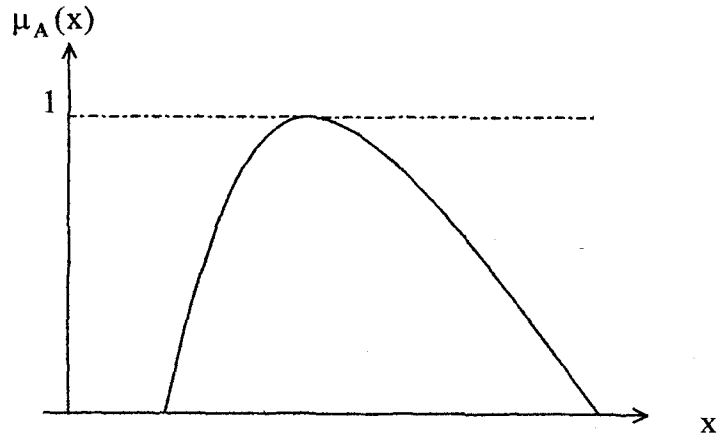
i)  $A$  bulanık alt kümesi,  $\forall x \in R$  için,  $\bigvee_n \mu_A(x) = 1$  ise, yani  $\mu_A(x)$  in en büyük değeri (yüksekliği) 1'e eşitse normal bulanık alt kümedir.

ii)  $\forall x_1, x_2 \in R$  ve  $\forall \lambda \in [0,1]$  için,

$$\mu_A(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(\mu_A(x_1), \mu_A(x_2))$$

ise  $A \subset R$  bulanık alt kümesi konvektir. Ayrıca  $A$ 'nın bütün  $\alpha$ -kesitleri de konvektir (Pedrycz, 1989).

Başka bir ifadeyle  $R'$  deki bir bulanık sayı,  $R'$  de yüksekliği 1 olan (normal) ve konveks olan bir bulanık alt kümedir. Bir bulanık sayı, güven aralığının bir genelleştirilmesi olarak gözönünde bulundurulabilir. Fakat bu hiçbir zaman bir Rassel değişken değildir. Rassel değişken olasılık teorisinde tanımlı bir kavram olup objektiftir. Bulanık sayı ise subjektiftir (Kaufmann ve Gupta, 1991). Ayrıca güven aralığı kavramı yerine "tahmin seviyesi" kavramı kullanılabilir. Şekil 3.1 de bir konveks ve normal bulanık küme gösterilmektedir.



Şekil 3.1 Bir konveks ve normal bulanık küme

## 3.2 Bulanık Sayılarda İşlemler

### 3.2.1 Bulanık Sayılarda Toplama

A ve B iki bulanık sayı,  $A_\alpha$  ve  $B_\alpha$  ise  $\alpha \in [0,1]$  tahmin seviyesi için A ve B nin güven aralıkları olsun. Bu durumda,

$$A_\alpha (+) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] (+) [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] \quad (3.1)$$

şeklinde yazılabilir. Eğer  $A, B \subset R$  ise  $\alpha$  seviyesinde güven aralığı için  $A_\alpha$  ve  $B_\alpha$  kümeleri şu şekilde tanımlanır:

$$A_\alpha = \{x \mid \mu_A(x) \geq \alpha\} \quad (3.2)$$

$$B_\alpha = \{x \mid \mu_B(x) \geq \alpha\} \quad (3.3)$$

Bulanık sayıların toplamını bir başka şekilde tanımlamakta mümkündür:

$A, B \subset R, \forall x, y, z \in R$  için,

$$\mu_{A(+ )B}(z) = \max_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (3.4)$$

Ayrıca (3.2) ve (3.3) eşitliklerinden,

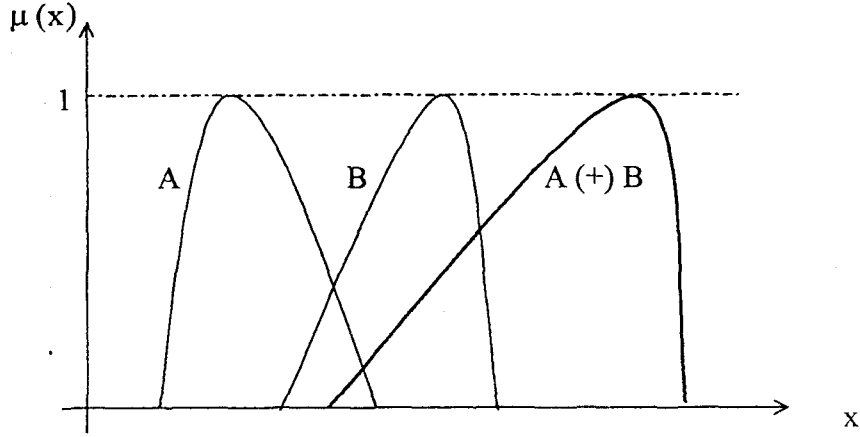
$$A = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot A_\alpha = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] \quad (3.5)$$

$$B = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot B_\alpha = \bigcup_{\alpha} \alpha \cdot [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] \quad (3.6)$$

eşitliklerini yazabiliriz. Şimdi (3.4) eşitliğine geri döner ve her  $\alpha$  seviyesi için yeniden yazacak olursak;

$$\forall x, y, z \in R \text{ için, } \mu_{A_\alpha(+ )B_\alpha}(z) = \max_{z=x+y} (\mu_{A_\alpha}(x) \wedge \mu_{B_\alpha}(y)) \quad (3.7)$$

eşitliği ortaya çıkacaktır. Şekil 3.2' de iki bulanık sayının toplamı gösterilmiştir.



Şekil 3.2 İki bulanık sayının toplamı

A ve B,  $\mathbb{R}$  reel sayılar kümesinde iki bulanık sayı olmak üzere,  $A (+) B$  toplamı da bir bulanık sayıdır. Bulanık sayılarda toplama işleminin değişme ve birleşme özelliği vardır. Toplama işlemi  $\mathbb{R}$ ' de olduğu gibi  $\mathbb{Z}$ ,  $\mathbb{R}^+$  ve  $\mathbb{N}$  kümelerinde de tanımlıdır.

### Örnek 3.1

Aşağıda A ve B'nin karakteristik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu iki sayının toplamını bulalım:

$\forall x \in \mathbb{R}$  için,

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 & x \leq -1 \\ &= \frac{x}{2} + \frac{1}{2} & -1 \leq x \leq 1 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{3}{2} & 1 \leq x \leq 3 \\ &= 0 & x \geq 3 \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0 & x \leq -5 \\ &= \frac{x}{7} + \frac{5}{7} & -5 \leq x \leq 2 \\ &= -\frac{x}{8} + \frac{10}{8} & 2 \leq x \leq 10 \\ &= 0 & x \geq 10 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Her  $\alpha$  seviyesi için güven aralığını hesaplamak, üçgen biçimiyle tanımlanacak  $\alpha$ 'nın fonksiyonuyla aşağıdaki gibi olur. (3.8)'den,

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}}{2} + \frac{1}{2} \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = 2\alpha - 1$$

$$\alpha = -\frac{a_2^{(\alpha)}}{2} + \frac{3}{2} \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = -2\alpha + 3 \text{ elde edilir. } \alpha \text{ seviyesi için güven aralığı,}$$

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [2\alpha - 1, -2\alpha + 3] \quad (3.10)$$

(3.9)'dan

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{7} + \frac{5}{7} \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = 7\alpha - 5$$

$$\alpha = -\frac{b_2^{(\alpha)}}{8} + \frac{10}{8} \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = -8\alpha + 10, \text{ buradan B' nin } \alpha \text{ seviyesinde güven aralığı,}$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [7\alpha - 5, -8\alpha + 10] \quad (3.11)$$

(3.10) ve (3.11) toplanırsa:

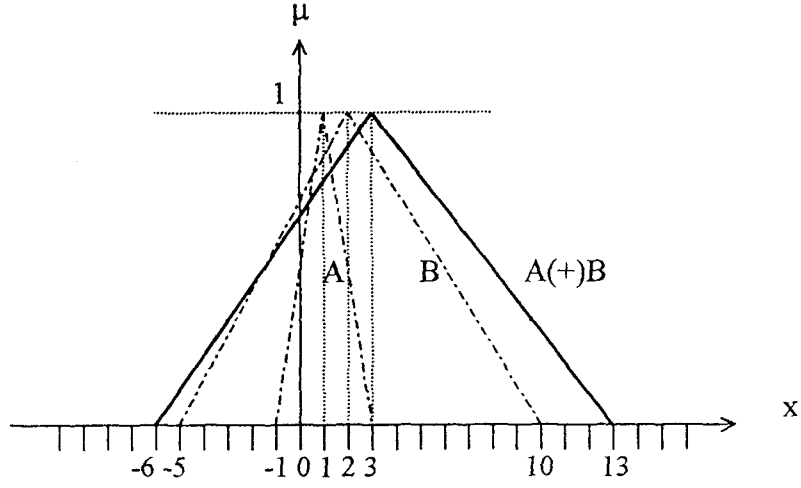
$$\begin{aligned} A_\alpha (+) B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha - 1 + 7\alpha - 5, -2\alpha + 3 - 8\alpha + 10] \\ &= [9\alpha - 6, -10\alpha + 13] \end{aligned} \quad (3.12)$$

Buradan,  $a_1^{(\alpha)} + b_1^{(\alpha)} = 9\alpha - 6$  ve  $a_2^{(\alpha)} + b_2^{(\alpha)} = -10\alpha + 13$  elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \mu_{A(+ )B}(x) &= 0 & x \leq -6 \\ &= \frac{x}{9} + \frac{6}{9} & -6 \leq x \leq 3 \\ &= -\frac{x}{10} + \frac{13}{10} & 3 \leq x \leq 13 \\ &= 0 & x \geq 13 \end{aligned}$$

Şekil 3.3' te bu örnekte verilen iki üçgen bulanık sayının toplamı gösterilmiştir.



Şekil 3.3 İki üçgen bulanık sayının toplamı

### Örnek 3.2

Z tamsayılar kümesinde sayısal olarak verilmiş A ve B bulanık sayıları sırasıyla,

A ;	x	0	1	2	3	4	5	6
$\mu_A(x)$		0	0.3	0.8	1	0.5	0.1	0

B ;	y	0	1	2	3	4	5
$\mu_B(y)$		0	0.6	1	0.9	0.5	0

$C = A (+) B$  olmak üzere,  $\mu_C(z)$  ( $0 \leq z \leq 10$ ) değerlerini bulmak için,

$\mu_{A_{\alpha} (+) B_{\alpha}}(z) = \max_{z=x+y} (\mu_{A_{\alpha}}(x) \wedge \mu_{B_{\alpha}}(y))$  'den faydalanarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mu_C(1) = (0 \wedge 0.6) \vee (0 \wedge 0.3) = 0$$

$$\mu_C(2) = (0 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.6) \vee (0.8 \wedge 0) = 0.3$$



$$\mu_C(3) = (1 \wedge 0) \vee (0.8 \wedge 0.6) \vee (0.3 \wedge 1) \vee (0 \wedge 0.9) = 0.6$$

$$\mu_C(4) = (0.5 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0.6) \vee (0.8 \wedge 1) \vee (0.3 \wedge 0.9) \vee (0 \wedge 0.5) = 0.8$$

$$\mu_C(5) = (0.1 \wedge 0) \vee (0.5 \wedge 0.6) \vee (1 \wedge 1) \vee (0.8 \wedge 0.9) \vee (0.3 \wedge 0.5) \vee (0 \wedge 0) = 1$$

$$\mu_C(6) = (0 \wedge 0) \vee (0.1 \wedge 0.6) \vee (0.5 \wedge 1) \vee (1 \wedge 0.9) \vee (0.8 \wedge 0.5) \vee (0.3 \wedge 0) = 0.9$$

$$\mu_C(7) = (0 \wedge 0.6) \vee (0.1 \wedge 1) \vee (0.5 \wedge 0.9) \vee (1 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0) = 0.5$$

$$\mu_C(8) = (0 \wedge 1) \vee (0.1 \wedge 0.9) \vee (0.5 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0) = 0.5$$

$$\mu_C(9) = (0 \wedge 0.9) \vee (0.1 \wedge 0.5) \vee (0.5 \wedge 0) = 0.1$$

$$\mu_C(10) = (0 \wedge 0.5) \vee (0.1 \wedge 0) = 0$$

C;	$z = x+y$	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
	$\mu_{A(+)}B(z)$	0	0.3	0.6	0.8	1	0.9	0.5	0.5	0.1	0

### 3.2.2 Bulanık Sayılarda Çıkarma

Reel sayıların her  $x, y, z \in \mathbb{R}$  için;

$$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (3.13)$$

iki bulanık kümenin farkı bu şekilde tanımlanır ya da ;

$$\forall \alpha \in [0, 1];$$

$$A_\alpha(-)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](-)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] \quad (3.14)$$

olarak tanımlanabilir.

Çıkarma işlemi bilindiği gibi toplama işleminin tersi olduğundan  $A(-)B$  işlemini

$A(+)(-B)$  şeklinde de düşünebiliriz. Bu durumda,

$$B_{\alpha}^{-} = [-b_2^{(\alpha)}, -b_1^{(\alpha)}] \quad (3.15)$$

$$\text{ve } \mu_{-B}(x) = \mu_B(-x) \quad (3.16)$$

şeklinde olacaktır. Buradan,

$$\mu_{A(+)(-B)}(z) = \max_{z=x+(-y)} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(-y)) = \max_{z=x+y} (\mu_A(x) \wedge \mu_{-B}(y)) \quad (3.17)$$

şeklinde toplama işlemine dönüştürülebilir.

Çıkarma işlemi değişme ve birleşme özelliklerine sahip değildir.  $R$  reel sayılar kümesinde olduğu gibi  $Z$  tamsayılar kümesinde de tanımlıdır.  $R^{-}$  negatif gerçekte sayılar ve  $N$  doğal sayılar kümelerinde ise tanımlı değildir. Çünkü bu kümelerde işlemin sonucu, negatif üyelik değeri üretebilmektedir (Kaufmann ve Gupta, 1991).

### Örnek 3.3

Aşağıda  $A$  ve  $B$ 'nin üyelik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu iki bulanık sayının farkını bulalım:

$\forall x \in R$  için,

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 & x \leq 0 \\ &= \frac{x}{2} & 0 \leq x \leq 2 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{4}{2} & 2 \leq x \leq 4 \\ &= 0 & x \geq 4 \end{aligned} \quad (3.18)$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0 & x \leq 3 \\ &= \frac{x}{5} - \frac{3}{5} & 3 \leq x \leq 8 \\ &= -\frac{x}{3} + \frac{11}{3} & 8 \leq x \leq 11 \\ &= 0 & x \geq 11 \end{aligned} \quad (3.19)$$

(3.18)' i kullanarak,

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}}{2} \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = 2\alpha$$

$$\alpha = -\frac{a_2^{(\alpha)}}{2} + \frac{4}{2} \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = -2\alpha + 4 \text{ yazabiliriz. Buradan,}$$

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [2\alpha, -2\alpha + 4] \text{ olur.} \quad (3.20)$$

(3.19)' u kullanarak ise,

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{5} - \frac{3}{5} \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = 5\alpha + 3$$

$$\alpha = -\frac{b_2^{(\alpha)}}{3} + \frac{11}{3} \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = -3\alpha + 11 \text{ yazabiliriz. Buradan da,}$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [5\alpha + 3, -3\alpha + 11] \text{ olur.} \quad (3.21)$$

(3.20)' den (3.21) çıkarılırsa:

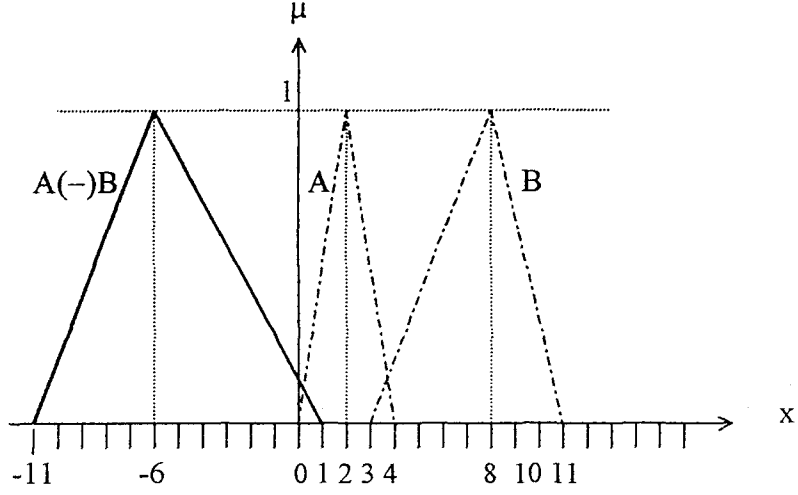
$$\begin{aligned} A_\alpha (-) B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)}] = [2\alpha - (-3\alpha + 11), -2\alpha + 4 - (5\alpha + 3)] \\ &= [5\alpha - 11, -7\alpha + 1] \end{aligned} \quad (3.22)$$

Buradan,  $a_1^{(\alpha)} - b_2^{(\alpha)} = 5\alpha - 11$  ve  $a_2^{(\alpha)} - b_1^{(\alpha)} = -7\alpha + 1$  değerleri elde edilir.

Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \mu_{A(-)B}(x) &= 0 & x \leq -11 \\ &= \frac{x}{5} + \frac{11}{5} & -11 \leq x \leq -6 \\ &= -\frac{x}{7} + \frac{1}{7} & -6 \leq x \leq 1 \\ &= 0 & x \geq 1 \end{aligned}$$

Şekil 3.4' te bu örnekte verilen iki üçgen bulanık sayının fark işlemi gösterilmiştir.



Şekil 3.4 İki üçgen bulanık sayının farkı

### Örnek 3.4

Z tamsayılar kümesinde sayısal olarak verilmiş A ve B bulanık sayıları sırasıyla,

A ;	x	-2	-1	0	1	2	3	4
$\mu_A(x)$		0.4	0.6	0.1	1	0.5	0.8	0

B ;	y	-1	0	1	2	3	4
$\mu_B(y)$		0	0.3	0.2	0.7	0.5	0.9

$\mu_{A(-)B}(z) = \bigvee_{z=x-y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y))$ ' den aşağıdaki değerleri elde ederiz:

$$\mu_{A(-)B}(-6) = (0.4 \wedge 0.9) = 0.4$$

$$\mu_{A(-)B}(-5) = (0.4 \wedge 0.5) \vee (0.6 \wedge 0.9) = 0.6$$

$$\mu_{A(-)B}(-4) = (0.4 \wedge 0.7) \vee (0.6 \wedge 0.5) \vee (0.1 \wedge 0.9) = 0.5$$

$$\mu_{A(-)B}(-3) = (0.4 \wedge 0.2) \vee (0.6 \wedge 0.7) \vee (0.1 \wedge 0.5) \vee (1 \wedge 0.9) = 0.9$$

$$\mu_{A(-)B}(-2) = (0.4 \wedge 0.3) \vee (0.6 \wedge 0.2) \vee (0.1 \wedge 0.7) \vee (1 \wedge 0.5) \vee (0.5 \wedge 0.9) = 0.5$$

$$\mu_{A(-)B}(-1) = (0.4 \wedge 0) \vee (0.6 \wedge 0.3) \vee (0.1 \wedge 0.2) \vee (1 \wedge 0.7) \vee (0.5 \wedge 0.5) \vee (0.8 \wedge 0.9) = 0.8$$

$$\mu_{A(-)B}(0) = (0.6 \wedge 0) \vee (0.1 \wedge 0.3) \vee (1 \wedge 0.2) \vee (0.5 \wedge 0.7) \vee (0.8 \wedge 0.5) \vee (0 \wedge 0.9) = 0.5$$

$$\mu_{A(-)B}(1) = (0.1 \wedge 0) \vee (1 \wedge 0.3) \vee (0.5 \wedge 0.2) \vee (0.8 \wedge 0.7) \vee (0 \wedge 0.5) = 0.7$$

$$\mu_{A(-)B}(2) = (1 \wedge 0) \vee (0.5 \wedge 0.3) \vee (0.8 \wedge 0.2) \vee (0 \wedge 0.7) = 0.3$$

$$\mu_{A(-)B}(3) = (0.5 \wedge 0) \vee (0.8 \wedge 0.3) \vee (0 \wedge 0.2) = 0.3$$

$$\mu_{A(-)B}(4) = (0.8 \wedge 0) \vee (0 \wedge 0.3) = 0$$

$$\mu_{A(-)B}(5) = (0 \wedge 0) = 0$$

$z = x - y$	-6	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
$\mu_{A(-)B}(z)$	0.4	0.6	0.5	0.9	0.5	0.8	0.5	0.7	0.3	0.3	0	0

### 3.2.3 Bulanık Sayılarda Çarpma

Bulanık sayılarda çarpma işlemi;  $R^+$  pozitif reel sayılar ve  $N$  doğal sayılarda tanımlıdır.  $R^+$  pozitif reel sayılarda  $A$  ve  $B$  gibi iki bulanık sayıyı ele alacak olursak,  $\alpha$  güven aralığı için  $A$  ve  $B$ 'nin çarpımı;

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](\cdot)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}] \quad (3.23)$$

şeklinde tanımlanır. Çarpma işlemi için diğer bir tanım;

$$\forall x, y, z \in R^+ :$$

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \max_{z=x \cdot y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \quad (3.24)$$

Bulanık sayılarda çarpma işleminin değişme ve birleşme özellikleri vardır. Ayrıca iki bulanık sayının çarpımı yine bir bulanık sayıdır. Fakat iki üçgen bulanık sayının çarpımı üçgen olmayan bir bulanık sayıdır.

### Örnek 3.5

Aşağıda A ve B'nin üyelik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu iki bulanık sayının çarpımını bulalım:

$\forall x \in \mathbb{R}^+$  için,

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 & x \leq 2 \\ &= x - 2 & 2 \leq x \leq 3 \\ &= -\frac{x}{2} + \frac{5}{2} & 3 \leq x \leq 5 \\ &= 0 & x \geq 5 \end{aligned} \quad (3.25)$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0 & x \leq 3 \\ &= \frac{x}{2} - \frac{3}{2} & 3 \leq x \leq 5 \\ &= -x + 6 & 5 \leq x \leq 6 \\ &= 0 & x \geq 6 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Buna göre A ve B bulanık sayılarına ilişkin  $\alpha$  seviyeleri aşağıdaki gibi bulunabilir;

$$\alpha = a_1^{(\alpha)} - 2 \quad \Rightarrow \quad a_1^{(\alpha)} = \alpha + 2$$

$$\alpha = -\frac{a_2^{(\alpha)}}{2} + \frac{5}{2} \quad \Rightarrow \quad a_2^{(\alpha)} = -2\alpha + 5 \text{ yazabiliriz. Buradan,}$$

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 2, -2\alpha + 5] \text{ olur.} \quad (3.27)$$

(3.26)'yı kullanarak ise,

$$\alpha = \frac{b_1^{(\alpha)}}{2} - \frac{3}{2} \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = 2\alpha + 3$$

$$\alpha = -b_2^{(\alpha)} + 6 \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = -\alpha + 6 \text{ yazabiliriz. Buradan da,}$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [2\alpha + 3, -\alpha + 6] \text{ olur.} \quad (3.28)$$

(3.27) ile (3.28) çarpılırsa:

$$\begin{aligned} A_\alpha(.)B_\alpha &= [a_1^{(\alpha)} \cdot b_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} \cdot b_2^{(\alpha)}] = [(\alpha + 2) \cdot (2\alpha + 3), (-2\alpha + 5) \cdot (-\alpha + 6)] \\ &= [2\alpha^2 + 7\alpha + 6, 2\alpha^2 - 17\alpha + 30] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Buradan,

$$2\alpha^2 + 7\alpha + 6 - x = 0$$

ve

$$2\alpha^2 - 17\alpha + 30 - x = 0 \text{ denklemleri elde edilir.}$$

Bu denklemlerin  $[0, 1]$  aralığında, iki kökü mevcuttur. Denklemler çözüldüğünde;

$$\alpha = \frac{-7 + \sqrt{1 + 8x}}{4} \text{ ve } \alpha = \frac{17 - \sqrt{49 + 8x}}{4} \text{ elde edilir.}$$

Sonuç olarak,

$\forall x \in \mathbb{R}^+$  için,

$$\mu_{A(.)B}(x) = 0 \quad x \leq 6$$

$$= \frac{-7 + \sqrt{1 + 8x}}{4} \quad 6 \leq x \leq 15$$

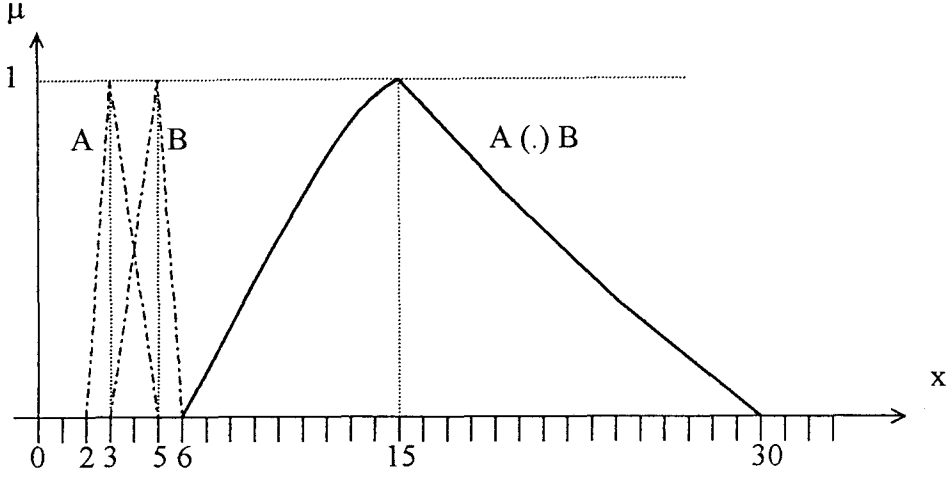
$$= \frac{17 - \sqrt{49 + 8x}}{4} \quad 15 \leq x \leq 30$$

$$= 0 \quad x \geq 30$$

Bu denklemler doğru denklemi olmadıklarından üçgen bulanık sayı olamazlar.

Şekil 3.5' te bu örnekte verilen iki üçgen bulanık sayının çarpım işlemi gösterilmiştir.

A ve B sayıları bulanık üçgen sayı olduğu halde,  $A(.)B$  üçgen olmayan bir bulanık sayıdır.



Şekil 3.5 İki bulanık sayının çarpımı

### Örnek 3.6

N doğal sayılar kümesinde sayısal olarak verilmiş A ve B bulanık sayıları sırasıyla,

A ;	x	1	2	3	4	5
$\mu_A(x)$		0	0.3	1	0.6	0

B ;	y	1	2	3	4	5	6
$\mu_B(y)$		0	0.2	0.5	1	0.4	0

şekindedir. İki bulanık sayıyı çarparken, (3.24)' e göre; önce  $z'$  nin değeri  $\mu=1$  için bulunur. Bulduğumuz bu değer maksimum değerden solundan sağına geçerken  $z'$  nin hangi değerde olduğunu gösterir. Yukarıda verilen A ve B bulanık sayılarında  $\mu=1$  değeri, (3,4) sayı ikilisi için sağlanır. Yani,



$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \mu(x,y=12) = \mu(3,4) = 1$  dir.

12' ye kadarki değerler  $\mu = 1$ ' in solunda; 12' den sonraki değerler ise  $\mu = 1$ ' in sağında yer alır.

$\mu(x,y)$  değerleri hesaplanırken;

i)  $x.y \leq z$  olduğunda (3.24)' e göre,  $z$ ' nin solundaki tüm sayı ikilileri işleme katılır.

ii)  $x.y \geq z$  ise yine (3.24)' e göre,  $z$ ' nin sağındaki tüm sayı ikilileri işleme katılır.

$$\mu(4) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} = 0.2$$

$$\mu(5) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} = 0.2$$

$$\mu(6) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.5)}^{2 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.2)}^{3 \times 2} = 0.3$$

$$\mu(7) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.5)}^{2 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.2)}^{3 \times 2} = 0.3$$

$$\mu(8) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.5)}^{2 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.2)}^{3 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 1)}^{2 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.2)}^{4 \times 2} = 0.3$$

$$\mu(9) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.5)}^{2 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.2)}^{3 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 1)}^{2 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.2)}^{4 \times 2} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.5)}^{3 \times 3} = 0.5$$

$$\mu(10) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.5)}^{2 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.2)}^{3 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 1)}^{2 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.2)}^{4 \times 2} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.5)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.4)}^{2 \times 5} = 0.5$$

$$\mu(11) = \overbrace{(0.3 \wedge 0.2)}^{2 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.5)}^{2 \times 3} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.2)}^{3 \times 2} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 1)}^{2 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.2)}^{4 \times 2} \vee \overbrace{(1 \wedge 0.5)}^{3 \times 3} \vee \overbrace{(0.3 \wedge 0.4)}^{2 \times 5} = 0.5$$

$$\mu(12) = 1$$

$$\mu(13) = \overbrace{(1 \wedge 0.4)}^{3 \times 5} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 1)}^{4 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.4)}^{4 \times 5} = 0.6$$

$$\mu(14) = \overbrace{(1 \wedge 0.4)}^{3 \times 5} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 1)}^{4 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.4)}^{4 \times 5} = 0.6$$

$$\mu(15) = \overbrace{(1 \wedge 0.4)}^{3 \times 5} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 1)}^{4 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.4)}^{4 \times 5} = 0.6$$

$$\mu(16) = \overbrace{(0.6 \wedge 1)}^{4 \times 4} \vee \overbrace{(0.6 \wedge 0.4)}^{4 \times 5} = 0.6$$

$$\mu(17) = \mu(18) = \mu(19) = \overbrace{(0.6 \wedge 0.4)}^{4 \times 5} = 0.4$$

$$\mu(20) = \overbrace{(0.6 \wedge 0.4)}^{4 \times 5} = 0.4$$

$$\mu(z > 20) = 0$$

$z = x.y$	.....3	4	5	6,7,8	9,10,11	12	13,....,16	17,....,20	21.....
$\mu_{A(\cdot)B}(z)$	.....0	0.2	0.2	0.3	0.5	1	0.6	0.4	0.....

### 3.2.4 Bulanık Sayılarda Bölme

Bulanık sayılarda bölme işlemi,  $\mathbb{R}^+$  pozitif reel sayılarda tanımlı olup iki bulanık sayının bölümü şu şekilde tanımlanır:

$\forall \alpha \in [0,1]$  ve  $b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} > 0$  için,

$$A_\alpha(\cdot)B_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}](\cdot)[b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [a_1^{(\alpha)} / b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} / b_1^{(\alpha)}] \quad (3.30)$$

veya

$\forall x, y, z \in \mathbb{R}^+$ :

$$\mu_{A(\cdot)B}(z) = \max_{z=x/y} (\mu_A(x) \wedge \mu_B(y)) \text{ dir.} \quad (3.31)$$

Bölme işlemi, çarpma işleminin ters işlemi olarak düşünülebileceğinden,  $B_\alpha$ 'nın tersi;

$\forall \alpha \in [0,1]$  ve  $b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)} > 0$  için,

$$B_\alpha^{-1} = [1/b_2^{(\alpha)}, 1/b_1^{(\alpha)}] \quad (3.32)$$

yazılabilir. Yani bölme işleminin aslında  $A_\alpha(\cdot)B_\alpha^{-1}$  şeklinde olduğu düşünülebilir. Bulanık sayılarda bölme işleminin değişme ve birleşme özellikleri yoktur. İki üçgen bulanık sayının bölümü üçgen olmayan bir bulanık sayıdır.

### Örnek 3.7

Aşağıda A ve B'nin üyelik fonksiyonları tanımlanmıştır. Bu iki üçgen bulanık sayının bölümünü bulalım:

$\forall x \in \mathbb{R}^+$  için,

$$\begin{aligned} \mu_A(x) &= 0 & x \leq 18 \\ &= \frac{x}{4} - \frac{18}{4} & 18 \leq x \leq 22 \\ &= -\frac{x}{11} + 3 & 22 \leq x \leq 33 \\ &= 0 & x \geq 33 \end{aligned} \quad (3.33)$$

$$\begin{aligned} \mu_B(x) &= 0 & x \leq 5 \\ &= x - 5 & 5 \leq x \leq 6 \\ &= -\frac{x}{2} + 4 & 6 \leq x \leq 8 \\ &= 0 & x \geq 8 \end{aligned} \quad (3.34)$$

Buna göre A ve B bulanık sayılarına ilişkin  $\alpha$  seviyeleri aşağıdaki gibi bulunabilir;

(3.33)'ten;

$$\alpha = \frac{a_1^{(\alpha)}}{4} - \frac{18}{4} \Rightarrow a_1^{(\alpha)} = 4\alpha + 18$$

$$\alpha = -\frac{a_2^{(\alpha)}}{11} + 3 \Rightarrow a_2^{(\alpha)} = -11\alpha + 33 \text{ yazabiliriz. Buradan,}$$

$$A_\alpha = [a_1^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)}] = [4\alpha + 18, -11\alpha + 33] \text{ olur.} \quad (3.35)$$

(3.34)' ü kullanarak ise,

$$\alpha = b_1^{(\alpha)} - 5 \Rightarrow b_1^{(\alpha)} = \alpha + 5$$

$$\alpha = -\frac{b_2^{(\alpha)}}{2} + 4 \Rightarrow b_2^{(\alpha)} = -2\alpha + 8 \text{ yazabiliriz. Buradan da,}$$

$$B_\alpha = [b_1^{(\alpha)}, b_2^{(\alpha)}] = [\alpha + 5, -2\alpha + 8] \text{ olur.} \quad (3.36)$$

$$A_\alpha (\cdot) B_\alpha = [a_1^{(\alpha)} / b_2^{(\alpha)}, a_2^{(\alpha)} / b_1^{(\alpha)}] = \left( \frac{4\alpha + 18}{-2\alpha + 8}, \frac{-11\alpha + 33}{\alpha + 5} \right) \quad (3.37)$$

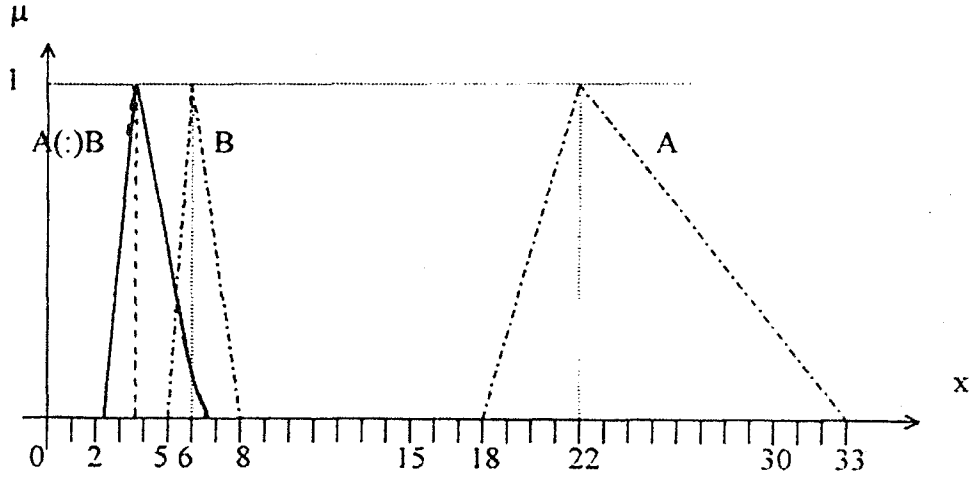
Buradan,  $\frac{a_1^{(\alpha)}}{b_2^{(\alpha)}} = \frac{4\alpha + 18}{-2\alpha + 8}$  ve  $\frac{a_2^{(\alpha)}}{b_1^{(\alpha)}} = \frac{-11\alpha + 33}{\alpha + 5}$  elde edilir.

Sonuç olarak,

$\forall x \in \mathbb{R}^+$  için,

$$\begin{aligned} \mu_{A(\cdot)B}(x) &= 0 & x &\leq \frac{9}{4} \\ &= \frac{4x - 9}{x + 2} & \frac{9}{4} &\leq x \leq \frac{11}{3} \\ &= \frac{-5x + 33}{x + 11} & \frac{11}{3} &\leq x \leq \frac{33}{5} \\ &= 0 & x &\geq \frac{33}{5} \end{aligned}$$

Şekil 3.6 da bu örnekte verilen iki üçgen bulanık sayının bölümü gösterilmiştir. A ve B sayıları bulanık üçgen sayı olduğu halde,  $A(\cdot)B$  üçgen olmayan bir bulanık sayıdır.



Şekil 3.6 İki bulanık sayının bölümü

### 3.3 Özel Bulanık Sayılar

Birçok durumda bulanık sayılarda uzanım-genişleme prensibinin kullanılması sıradan bir işlem olacaktır. Bu nedenle bu konu üzerinde çalışan kişiler tarafından bazı özel bulanık sayılar tanımlanmıştır. Burada Dubois ve Prade' nin, L-R bulanık sayıları ile, yine ilk defa Dubois ve Prade' nin kullandığı fakat daha sonraları Kaufmann ve Gupta' nın geliştirdiği üçgensel (traingular) bulanık sayılardan bahsedeceğiz.

#### 3.3.1 L-R Bulanık Sayılar

Ancak ve ancak aşağıdaki koşulları sağlayan bir bulanık sayı L (left side - sol taraf) veya R (right side - sağ taraf) bulanık sayısı olarak tanımlanabilir (Pedrycz, 1989);

- i)  $L(x) = L(-x)$
- ii)  $L(0) = 1$
- iii)  $L, [0, +\infty)$  aralığında artar.

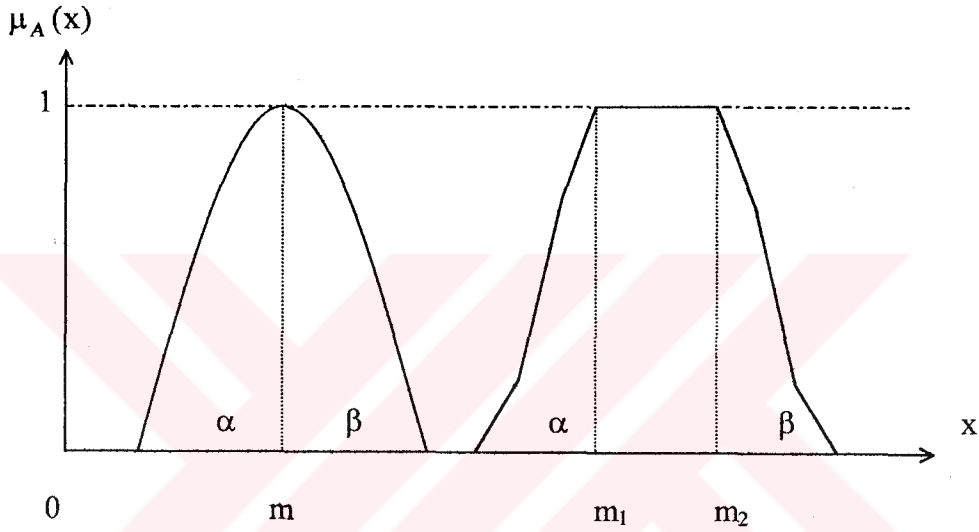
L-R tipindeki bir A bulanık sayısı için üyelik fonksiyonu;

$$\mu_A(x) = \begin{cases} L\left(\frac{m-x}{\alpha}\right), & x \leq m, \alpha > 0 \\ R\left(\frac{x-m}{\beta}\right), & x > m, \beta > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

şeklinde tanımlanır (Chen ve Hwang, 1992). Burada  $m$ ,  $A$  bulanık sayısının ortasıdır.  $\alpha$  ve  $\beta$  ise sırasıyla sol ve sağ yayılmalardır.

$\alpha = \beta = 0$  olduğunda  $A$ , bir  $m$  keskin (crisp) sayısı olarak düşünülmelidir.  $A$  bulanık sayısı  $A = (m, \alpha, \beta)$  şeklinde gösterilir ve Şekil 3.7' deki gibi çizilebilir.

Eğer tepe noktası tek değilse bu durumda L-R bulanık sayısı  $A$ ,  $A = (m_1, m_2, \alpha, \beta)$  şeklinde gösterilir. Bu durumda Şekil 3.7' den görülebilir.



Şekil 3.7 L-R bulanık sayılar

### 3.3.2 Üçgensel (Triangular) Bulanık Sayılar

$\forall x, x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$  olsun. Bu durumda  $A$  üçgensel bulanık sayısı aşağıdaki gibi tanımlanır:

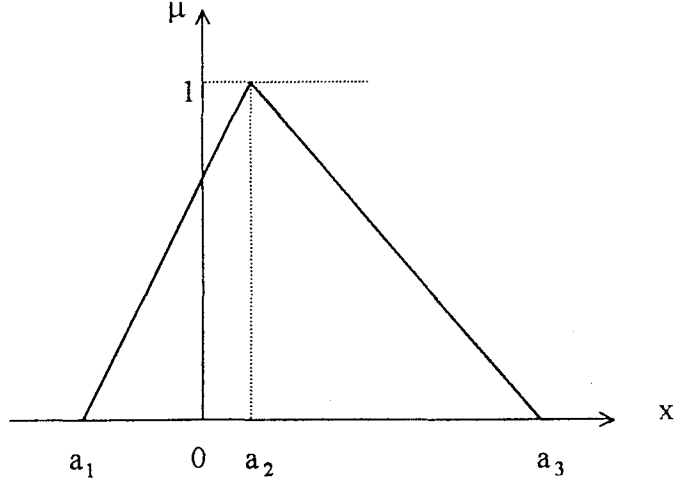
$$\mu_A(x) = 0 \quad x \leq x_1$$

$$= \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} \quad x_1 \leq x \leq x_2$$

$$= \frac{x_3 - x}{x_3 - x_2} \quad x_2 \leq x \leq x_3$$

$$= 0 \quad x \geq x_3$$

Şekil 3.8' de bir üçgen bulanık sayı olan  $A = (a_1, a_2, a_3)$  gösterilmektedir.



Şekil 3.8 Bir üçgen bulanık sayı  $A = (a_1, a_2, a_3)$

## 4. BULANIK MATEMATİKSEL PROGRAMLAMA

### 4.1 Giriş

Bulanık küme teorisi ilk defa yapay zeka alanındaki kesin olmayan-belirsiz problemleri çözmek özellikle de dilsel terimleri modellemek için kullanılmıştır. Karar verme problemlerinin çözümündeki ilk çalışmalar; Bellman ve Zadeh, Tanaka, Okuda ve Asai, Negoita, Zimmermann, Orlovsky, Yager ve Freeling tarafından yapılmıştır.

Tanaka' dan beri bir çok bulanık lineer programlama modelleri oluşturulmuştur. Kesin olmayan bilgiyle, lineer programlama modelleri iki ana sınıfa ayrılmaktadır. Bunlar; Bulanık (Fuzzy) Lineer Programlama (BLP) ve Possibilistik (olabilirli) Lineer Programlamadır (PLP). Biz bu çalışmada sadece BLP kısmından bahsedeceğiz.

Dyson; fayda teorisinde olduğu gibi, BLP' nin üyelik fonksiyonları tercihsel kavramlara dayandığından üyelik fonksiyonlarının fayda fonksiyonlarına denk olduğunu belirtmiştir. Fakat bu, PLP' deki olasılık dağılımları için doğru değildir.

“Matematiksel programlama” terimi burada, yöneylem araştırmasında olduğu gibi;

$$\begin{aligned} &\text{maksimum } f(x) \\ &g_i(x) = 0; \quad i = 1, \dots, m \\ &x_i \geq 0 \end{aligned} \tag{4.1}$$

şeklindeki modellerin çözümünde algoritmik bir yaklaşım olarak yorumlanacaktır.

$f(x)$ , amaç fonksiyonunun matematiksel karakterine ve  $g_i(x)$  kısıtlarına bağlı olarak matematiksel programlama algoritmalarının birçok çeşidi vardır. Bunlardan birkaçı; lineer programlama, kuadratik programlama, kesirli programlama ve konveks programlamadır.

Biz,

$c, x \in \mathbb{R}^n, b \in \mathbb{R}^m, A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  olmak üzere

$$\text{maksimum } f(x) = z = c^T x$$

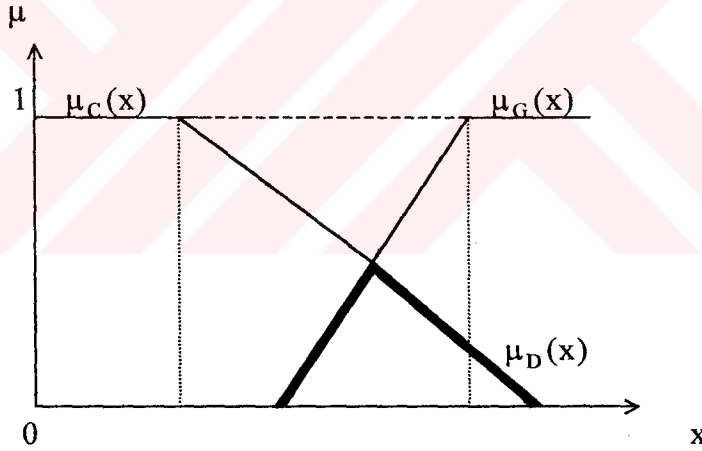
$$\text{kısıtlar : } Ax \leq b \tag{4.2}$$

$$x \geq 0$$



şeklinde ifade edilen en basit ve en sık kullanılan model olan lineer programlama modelini kullanacağız. Bu modelde, A' nın katsayıları ile b ve c' lerin reel sayılar olduğu, ayrıca " $\leq$ " işaretinin klasik anlamda kullanıldığı ve "maksimum" ifadesinin de kesin şart olduğu farzedilecektir. Bu da herhangi bir tek kısıtın aykırılığının, çözümü uygun kılmadığı ve bütün kısıtların eşit öneme sahip olduğunu ifade etmektedir.

Bu bölümde iki önemli model üzerinde durulacaktır: simetrik ve simetrik olmayan modeller. Simetrik modeller, Bellman ve Zadeh tarafından önerilen bulanık kararın tanımına dayanır. Bellman ve Zadeh, kesin olmayan durumlardaki amaçların ve kısıtların bulanık kümelerle gösterilebileceğini varsayarlar. Karar, bulanık amaçlar ve kısıtların karışımı olarak belirtilebilir ve max-min operatörü ile tanımlanabilir. Şöyle ki; bize X alternatifleri uzayında bir G bulanık amaçlar kümesi ve bir de C bulanık kısıtlar kümesi verilmiş olduğunu varsayalım. Sonra, G ve C nin birleşmesinden bir karar kümesi olan D kümesi oluşur. D kümesi G ve C nin kesişiminden oluşan bir bulanık kümedir ve  $\mu_D = \mu_G \cap \mu_C$  dir. Bu G, C ve D arasındaki ilişki Şekil 4.1' de gösterilmiştir.



Şekil 4.1 Bulanık kümeler C, G ve D arasındaki ilişki

Simetrik olmayan modeller aşağıdaki iki yaklaşım üzerine kurulmuştur (Zimmermann, 1985). Bunlar;

- 1) Bulanık küme kararının belirlenmesidir.
- 2) Uygun dönüşümler yapıldıktan sonra kısıtlarla birlikte amaç fonksiyonunun birleştirilerek kesin bir maksimize yapan kararın belirlenmesi.

Bulanık lineer programlamanın yeni bir modelini geliştirmeden önce, klasik lineer programlamaya karşıt olarak bulanık lineer programlama modeli için sadece bir tek model tanımlı olamaz, ancak varsayımlara veya gerçek durumun modellenmesine bağlı olarak birçok varyasyon mümkündür.

## 4.2 Bulanık Lineer Programlama Modelleri

Bu bölümde, bulanık lineer programlama problemleri ele alınacaktır. Her bir problem için kullanılacak metodoloji (yöntembilim) lineer üyelik fonksiyon formları ve max-min operatörlerinin ön kabullerinin ışığında gösterilmiştir. Diğer üyelik fonksiyon formları ve operatörleri de bazı özel durumlar için düşünülmüştür. Kolaylık için; üyelik fonksiyonları ve operatörlerini karar vericinin yargısıyla ve karar verme işlemindeki rasyonellikle uyumlu olduğunu varsayıyoruz.

### 4.2.1 Bulanık Kaynaklar İle Lineer Programlama Problemi

Bulanıklığın, lineer programlama (LP) problemlerinde, nasıl ve nerede kullanıldığını en iyi şekilde anlamak için basitleştirilmiş bir lineer programlama problemi verilmiştir.

Hardee oyuncak şirketi iki çeşit oyuncak bebek üretmektedir. A bebeği yüksek kaliteli ve birim başına 0.40\$ kar veren bir bebek, B bebeği ise daha düşük kaliteli ve yine birim başına 0.30\$ kar veren bir bebektir. Her oyuncak A bebeği için, oyuncak B bebeğine göre iki kat daha çok çalışma saati gerekmekte ve toplam mevcut çalışma saati 500 saat olmaktadır. A ve B oyuncak bebeklerinin her ikisi için de günde sadece 400 oyuncak bebek için yeterli malzeme sağlanmaktadır. Fabrikanın ürettiği tüm oyuncak bebeklerin satılabileceği de varsayılmaktadır. Buna göre, fabrika yöneticisi, üretim programındaki toplam karı maksimize etmeyi istemektedir.

Yönetici, üretim programlama problemini aşağıdaki gibi formüle eder:

$$\max \quad z = 0.4x_1 + 0.3x_2 \quad (\text{kar})$$

$$\text{kısıtlar} \quad g_1(x) = x_1 + x_2 \leq 400 \quad (\text{malzemeler})$$

$$g_2(x) = 2x_1 + x_2 \leq 500 \quad (\text{çalışma saati})$$

Burada;

$x_1$  : Üretilen A oyuncak bebek miktarı,

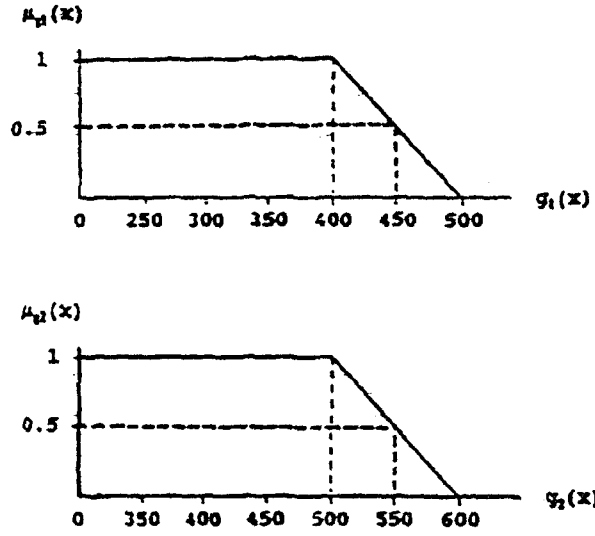
$x_2$  : Üretilen B oyuncak bebek miktarıdır.

Şekil 4.2 deki gibi grafik metodu kullanımıyla yukarıdaki LP probleminin optimal (en uygun) çözümü : A oyuncak bebeğinden 100 adet, B oyuncak bebeğinden 300 adet üretilmekte ve 130\$ kar elde edilmektedir. Daha sonra yönetici, bazı sebeplerden ötürü (örneğin, tedarik eden firmalardan fazladan ek malzeme alabilir) mevcut malzeme miktarının belli bir aralıkta değişebilir olduğu ve aynı şekilde mevcut çalışma saatinin de, işçilere fazla mesai yaptırılarak değiştirilebilir olduğu kanısına varır. Bundan dolayı, bulanık küme teorisini üretim programlama probleminde uygulamaya başlar. Ve yönetici artan kaynaklar sebebiyle, 130\$ dan daha fazla kar elde edilebileceğine karar verir.

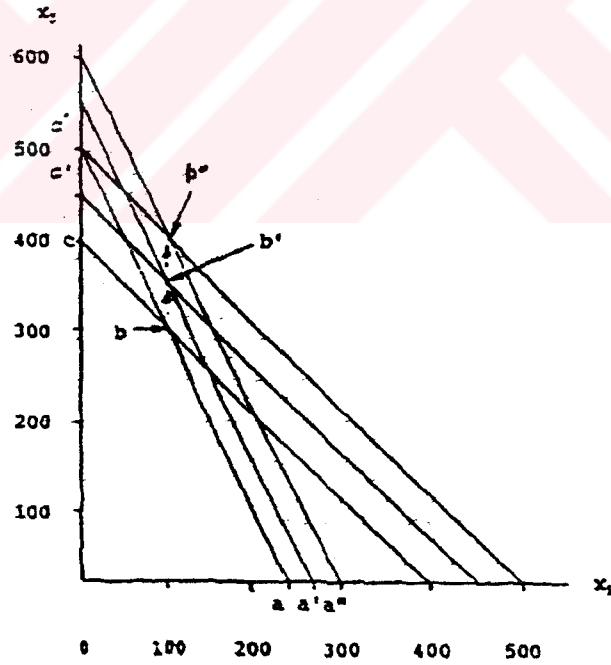
Çizelge 4.1 ve Şekil 4.3' te yönetici tarafından sağlanan malzeme ve zamanın üyelik fonksiyonları gösterilmiştir. Yönetici, üyelik fonksiyonlarının değerlerinin anlamını,  $g_1$  (malzeme) ve  $g_2$  (çalışma saatleri) kısıtlarındaki tatmin derecesi olarak açıklamaktadır. Örneğin, kullanılan toplam malzeme miktarı 400' den küçük veya eşit olduğu zaman " $g_1(x) \leq 400$ " kısıtı tam olarak sağlanmaktadır. Kullanılan toplam malzeme miktarı 500 e eşit veya büyük olduğunda " $g_1(x) \leq 400$ " kısıtı tamamen ihlal edilmektedir. Dolayısıyla, tatmin derecesi de sıfıra eşittir. 400 ile 500 arasında üyelik fonksiyonunun derecesi, monoton lineer azalandır. Mevcut zaman için üyelik fonksiyonu da aynı şekilde açıklanabilir. Böylece, yönetici, uygulanabilir çözümlerin, malzeme, çalışma saatleri ve karın üyelik fonksiyonlarının aynı anda sağlanmasıyla elde edileceği yargısına varır. Maksimum tatmin derecesi ile uygulanabilir alternatif çözümler, bu üretim programlama probleminin optimal çözümü olacak şekilde seçilir.

Şekil 4.4' ten anlaşılacağı gibi, mevcut malzeme 400 ve mevcut çalışma saati 500 olduğunda, optimal çözüm  $z = 130$ , tatmin seviyesi 1' dir ve  $x_1 = 100$  ile  $x_2 = 300$  (b noktası olarak görülüyor) değerlerinde ortaya çıkıyor.  $g_1(x) = 450$  ve  $g_2(x) = 550$  için optimal çözüm  $z' = 145$ , tatmin seviyesi 0.5' tir ve  $x_1 = 100$  ile  $x_2 = 350$  (b' noktası olarak gösteriliyor) değerlerinde elde ediliyor. Benzer şekilde  $g_1(x) = 500$  ve  $g_1(x) = 600$  olduğu zaman optimal çözüm  $z'' = 160$ , tatmin seviyesi de 0' dir ve  $x_1 = 100$  ile  $x_2 = 400$  (b'' noktası olarak gösteriliyor) değerlerinde elde ediliyor.





Şekil 4.3 Çalışma saatleri ve malzemelerin üyelik fonksiyonları



Şekil 4.4 Bulanık lineer programlama probleminin grafik çözümleri

Bu örnekte, BLP' de , belli bir tolerans aralığı üzerindeki üyelik fonksiyonu ile, mevcut kaynakların bulanıklığı nitelendirilmektedir. Optimal çözümler, üyelik fonksiyonu ve kısıtların üyelik fonksiyonlarının katları ile oluşturulmaktadır.

Mevcut bulanık kaynaklarla bu lineer programlamanın genel modeli şu şekilde formüle edilir:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ & (Ax)_i \leq \tilde{b}_i, i = 1, 2, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.a)$$

$\forall i, \tilde{b}_i \in [b_i, b_i + p_i]$ ,  $p_i$  verilen bir değer. Ayrıca aşağıdaki bulanık eşitsizlik kısıtlarını da göz önünde bulundurabiliriz:

$$\begin{aligned} \max \quad & z = cx \\ & (Ax)_i \leq_{\sim} b_i, i = 1, 2, \dots, m \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.3.b)$$

burada  $\leq_{\sim}$ , "bulanık eşit veya daha küçük" tür anlamına gelmektedir. Her bulanık kısıt için  $p_i$  toleransının bulunduğu farzedilmektedir. Bu durumda  $\forall i$  ve  $\theta \in [0,1]$  için,  $(Ax)_i \leq_{\sim} b_i$ ,

$(Ax)_i \leq (b_i + \theta p_i)$ ' ye denktir. Eğer, her iki durumunda üyelik fonksiyonları aynı ise (4.3.a) ve (4.3.b) denklemleri aynı problemdir. Böylece, bu çalışmada, her iki problem denk olarak ele alınmaktadır.

Verdegay, (4.3) denkleminde gösterilen problemin, kesin parametrik programlama problemine denk olduğunu ilk olarak ispatladı. Bundan dolayı, elimizdeki bu ilk BLP problemini çözmek için parametrik programlama metodlarını kullanabiliriz. Öte yandan, Werners bulanık kısıtlar yüzünden amacın bulanık olması gerektiğini düşünmüştür. Her iki yaklaşımda ele alınmıştır.

#### 4.2.1.1 Verdegay' ın Yaklaşımı – Simetrik Olmayan Model

(4.3) denklemi için, bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları :

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & (Ax)_i < b_i \\ 1 - [(Ax)_i - b_i] / p_i & b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & (Ax)_i > b_i + p_i \end{cases} \quad (4.4)$$

şeklinde olup sürekli ve monoton fonksiyonlar ise ve bu bulanık kısıtlar arasında tercih yapabilme söz konusu ise, (4.3) denklemi :

$X_\alpha = \{x \mid \mu_i(x) \geq \alpha, \forall i, x \geq 0\}$ , her  $\alpha \in [0,1]$  için,

max  $cx$

$$x \in X_\alpha \text{ ' e denk olur.} \quad (4.5)$$

$\alpha$  – kesiti kavramı, Tanaka ve Orlovski' nin önceki çalışmalarına dayanmaktadır.

Üyelik fonksiyonları eğer;

(1)  $(Ax)_i \leq b_i$  ise  $i$ -inci kısıt tam olarak sağlanmış olur,  $\mu_i(x) = 1$  olduğunu;

(2)  $(Ax)_i \geq b_i + p_i$  ( $p_i, b_i$  ' nin maksimum toleransı olup karar verici tarafından sistematik veya sistematik olmayan bir yolla belirlenir) ise  $i$ -inci kısıt kesinlikle geçersiz olur, yani  $\mu_i(x) = 0$  olduğunu;

(3)  $(Ax)_i \in (b_i, b_i + p_i)$  ise üyelik fonksiyonları monoton azalandır. Bu şunu ifade eder: “ne kadar fazla kaynak tüketilirse, karar veren kişi o kadar az tatmin olur”, demektir.

Böylece (4.4) denklemindeki üyelik fonksiyonları (4.5) denkleminde yerine yerleştirebilir ve  $\alpha = 1 - \theta$  olmak üzere, parametrik programlamaya denk olan aşağıdaki problem elde edilir:

max  $cx$

$$(Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)p_i, \forall i$$

$$x \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1] \quad (4.6)$$

Dolayısıyla, (4.3) denkleminde verilen BLP problemi, bulanık kısıtlara ait üyelik fonksiyonlarının bazı uygun formları kabul edildiği zaman kesin parametrik lineer programlama problemine denk alınabilir. Her bir  $\alpha$  için bir optimal çözüm vardır, dolayısıyla üyeliğin  $\alpha$  dereceli çözümü gerçekten bulanıktır.

Bu yaklaşımı daha da açmak için aşağıdaki şu iki örneği inceleyelim.

#### 4.2.1.1a Örnek 1: Knox Üretim-Karışım Seçme Problemi

Bir ürün-karışım seçme problemini göz önünde bulunduralım. Knox Mix şirketinin, dört farklı üretim işleminden birini veya daha fazlasını kullanma seçeneğine sahip olduğunu farzedelim. Birinci ve ikinci işlemden A ürününün parçaları ve üçüncü ve dördüncü işlemden de B ürününün parçaları elde ediliyor olsun. Her işlem için girdiler (veriler); işçi-gücü (çalışma ölçüsü olarak), Y malzemesi (ağırlık birimi olarak) ve Z malzemesi (kutu olarak) dir. Her işlemin girdi gereksinimleri değiştiği için işlemlerin farklılıklarına bağlı olarak, aynı ürünün üretim işlemleri için bile, işlemlerin karlılıkları farklı olur. İmalatçının haftalık üretim programı üzerine kararı, mevcut işçi-gücü miktarı ve her iki hammaddenin mevcut miktarı tarafından belirlenen olanakların genişliği ile sınırlıdır. Bütün teknoloji ve girdi kısıtlamaları Çizelge 4.2' de verilmiştir. 1,2,3 ve 4 işlemlerindeki üretim seviyeleri sırasıyla  $x_1, x_2, x_3$  ve  $x_4$  ile gösterilsin. Bu durumda, problem aşağıdaki LP problemi olarak formüle edilebilir.

$$\max \quad 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \quad (\text{kar})$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 \quad (\text{işçi-gücü})$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120 \quad (\text{Y malzemesi})$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 \quad (\text{Z malzemesi})$$

$$x_1, x_2, x_3 \text{ ve } x_4 \geq 0$$

Daha sonra bu LP problemini simpleks metoduyla çözelim. Sonuç tablosu Çizelge 4.3' te gösterilmiştir.

Optimal çözüm:  $x^* = (50/7, 0, 55/7, 0) = (7.14, 0, 7.86, 0)$  ve  $z^* = 695/7\$ = 99.25\$$ ' dir.



Kullanılan gerçek kaynaklar 15, 73.57 ve 100 birim sırasıyla işçi-gücü, Y malzemesi ve Z malzemesidir.

Mevcut toplam işçi-gücü ve Z malzemesinin tam belirli olmadığını ve onların maksimum toleranslarının sırasıyla 3 ve 20 birim olduğunu varsayalım. Bu durumda bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları :

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & g_1(x) < 15 \\ 1 - [g_1(x) - 15]/3 & 15 \leq g_1(x) \leq 18 \\ 0 & g_1(x) > 18 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1 & g_3(x) < 100 \\ 1 - [g_3(x) - 100]/20 & 100 \leq g_3(x) \leq 120 \\ 0 & g_3(x) > 120 \end{cases}$$

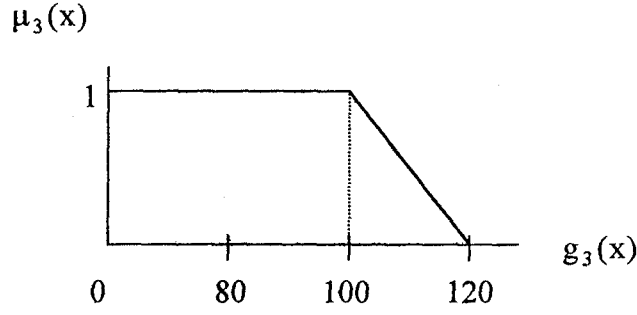
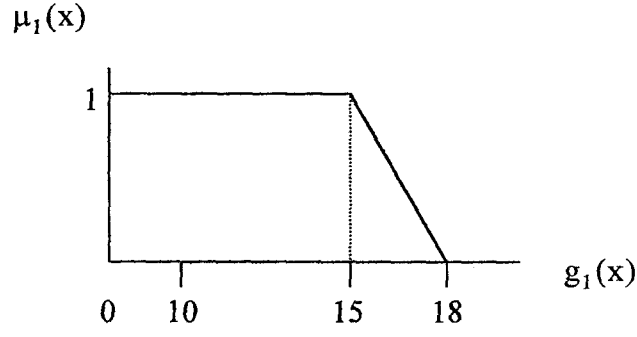
şekindedir. (Şekil 4.5).

Çizelge 4.2 Knox ürün-karışım seçim problemi için girdi bilgisi

Adet	İşçi-gücü	Y malzemesi (ağırlıklar)	Z malzemesi (kutular)	Birim kar
A ürününün bir adeti				
İşlem 1	1	7	3	4
İşlem 2	1	5	5	5
B ürününün bir adeti				
İşlem 3	1	3	10	9
İşlem 4	1	2	15	11
Toplam mevcut	≤15	≤120	≤100	maksimum

Çizelge 4.3 Knox ürün-karışım seçim problemi için simpleks metodun sonuç tablosu

Temel Değişken	4 x1	5 x2	9 x3	11 x4	0 s1	0 s2	0 s3	Sağ taraf sabiti (vektörü) STS
4 x1	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7	50/7
0 s2	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7	325/7
9 x3	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	55/7
zj - cj	0	2/7	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7



Şekil 4.5 Z malzemesi ve işçi-güçü kısıtlarının üyelik fonksiyonları

Bu durumda, aşağıdaki problem elde edilir:

$$\max \quad 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$\mu_1(x) \geq \alpha$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$\mu_3(x) \geq \alpha$$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ veya}$$

$$\max \quad 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 3(1 - \alpha)$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 120$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 20\alpha$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Burada,  $\theta \in [0,1]$  bir parametredir. Parametrik tekniğin ve Çizelge 4.3' teki simpleks metodun sonuç tablosundan faydalanılarak aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

$$(10/7, 0, -1/7) \begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} = 10\theta/7$$

$$(-61/7, 1, 4/7) \begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} = -103\theta/7$$

$$(-3/7, 0, 1/7) \begin{pmatrix} 3\theta \\ 0 \\ 20\theta \end{pmatrix} = 11\theta/7$$

Çizelge 4.4' te sonuç simpleks tablosu verilmiştir. STS;  $50/7 + 10\theta/7$ ,  $325/7 - 103\theta/7$  ve  $55/7 + 11\theta/7$ ,  $\theta \in [0,1]$  için her zaman sıfırdan büyüktür. O zaman optimal çözüm:  $x^* = (7.14 + 1.43\theta, 0, 7.86 + 1.57\theta, 0)$  ve  $z^* = (99.29 + 19.86\theta)$  dir. Bu sonuçları açık bir şekilde göstermek için Çizelge 4.5 oluşturulmuştur.

Çizelge 4.4 Knox ürün-karışım seçim problemi için simpleks metodun parametrik tablosu

Temel Değişken	4 x1	5 x2	9 x3	11 x4	0 s1	0 s2	0 s3	Sağ taraf sabiti (vektörü) STS
4 x1	1	5/7	0	-5/7	10/7	0	-1/7	50/7+10θ/7
0 s2	0	-6/7	0	13/7	-61/7	1	4/7	325/7-103θ/7
9 x3	0	2/7	1	12/7	-3/7	0	1/7	55/7+11θ/7
zj - cj	0	2/7	0	11/7	13/7	0	5/7	695/7+139θ/7

Çizelge 4.5 Parametrik programlama probleminin çözümleri

$\theta$	$z^*$	Gerçekte kullanılan kaynaklar		
		işçi-gücü	Y malzemesi	Z malzemesi
0.0	99.29	15.00	73.57	100.00
0.1	101.28	15.30	75.04	102.00
0.2	103.27	15.60	76.51	104.00
0.3	105.26	15.90	77.98	106.00
0.4	107.25	16.20	79.45	108.00
0.5	109.24	16.50	80.92	110.00
0.6	111.23	16.80	82.39	112.00
0.7	113.22	17.10	83.86	114.00
0.8	115.21	17.40	85.33	116.00
0.9	117.20	17.70	86.80	118.00
1.0	119.19	18.00	88.27	120.00

#### 4.2.1.1b Örnek 2: Taşıma Problemi

Bulanık talepli bir taşıma problemini göz önünde bulunduralım:

$$\min \quad cx$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq b_j, \quad j \in J = \{1, 2, \dots, n-1\}$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq a_i, \quad i \in I = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$x_{ij} \geq 0, \quad \forall i, j.$$

Bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları,  $\mu_j(\alpha), j \in J$  ve  $\mu_i(\alpha), i \in I$  olmak üzere sırasıyla sürekli ve kesin bir şekilde monoton olduğu farzedilsin. Bu durumda:

$$\sum_{i \in I} \mu_i^{-1}(\alpha) \geq \sum_{j \in J} \mu_j^{-1}(\alpha), \quad \alpha \in [0,1].$$

sağlanabilir.

Bu yüzden bu bulanık taşıma problemi kesin parametrik taşıma problemi yardımıyla çözülebilir. Yani:

$$\min \quad cx$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq \mu_j^{-1}(\alpha), j \in J$$

$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq \mu_i^{-1}(\alpha), i \in I$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \text{ ve } j, \alpha \in [0,1]$$

$\sum_i \mu_i^{-1}(\alpha) = \sum_j \mu_j^{-1}(\alpha)$ ' i elde etmek için n-inci yapay varılacak yer tanımlansın.

Böylece aşağıdaki parametrik LP problemi elde edilir:

$$\min \quad cx$$

$$\sum_{i \in I} x_{ij} \geq \mu_j^{-1}(\alpha), j \in J = \{1, 2, \dots, n\}$$

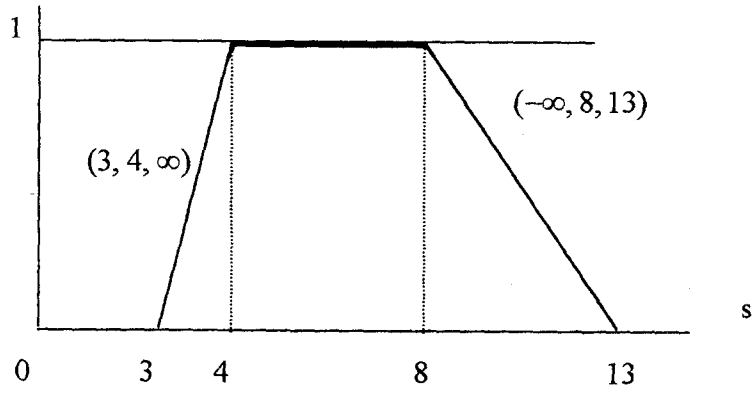
$$\sum_{j \in J} x_{ij} \geq \mu_i^{-1}(\alpha), i \in I$$

$$x_{ij} \geq 0, \forall i \text{ ve } j, \alpha \in [0,1].$$

Şimdi aşağıdaki bulanık taşıma probleminin sayısal örneğini göz önünde bulunduralım:

4	5	2	1	$(-\infty, 8, 13)$
4	2	4	3	$(-\infty, 6, 9)$
3	1	1	1	$(-\infty, 5, 6)$
$(3, 4, \infty)$	$(3, 5, \infty)$	$(3, 6, \infty)$	$(1, 4, \infty)$	

Burada sadelik amacıyla,  $s_1, s_2, s_3$  üçgensel biçimli notasyon olarak verilmiştir. (Şekil 4.6).

$\mu_i$  veya  $\mu_j$ 

Şekil 4.6 Üçgensel üyelik fonksiyonları

5. yapay hedef , üyelik fonksiyonu  $(-\infty, 0, 18)$  ile birlikte tanımlanarak aşağıdaki tablo elde edilir.

4	5	2	1	0	$13 - 5\alpha$
6	2	4	3	0	$9 - 3\alpha$
3	1	1	1	0	$6 - \alpha$
$3 + \alpha$	$3 + 2\alpha$	$3 + 3\alpha$	$1 + 3\alpha$	$18 - 18\alpha$	

Bu bulanık taşımanın bulanık çözümünü sağlayan optimum çözümü:

$\alpha \in [0, 3/5]$  için :

$3 + \alpha$		$6\alpha$	$1 + 3\alpha$	$9 - 15\alpha$
				$9 - 3\alpha$
	$3 + 2\alpha$	$3 - 3\alpha$		

$\alpha \in [3/5, 12/13]$  için :

$3 + \alpha$		$9 - 9\alpha$	$1 + 3\alpha$	
	$-9 + 15\alpha$			$18 - 18\alpha$
	$12 - 13\alpha$	$-6 + 12\alpha$		

$\alpha \in [12/13, 1]$  için :

$3 + \alpha$		$-3 + 4\alpha$	$13 - 10\alpha$	
	$3 + 2\alpha$		$-12 + 13\alpha$	$18 - 18\alpha$
		$6 - \alpha$		

şeklindedir.

OhEigartaigh taşıma problemleri için, bulanık taleplerin üyelik fonksiyonlarının üçgensel formda olduğu durumları göz önünde bulundurdu. Bazen karar verici, bazı özel talep miktarına sahip olmayı tercih edebilir. Bu miktardan daha azı veya daha çoğu daha az tercih edilir. Dolayısıyla, üçgensel üyelik fonksiyonu rasyoneldir. Chanas ve Kulej' de bulanık kaynakların üçgensel üyelik fonksiyonları ile LP problemini çözmek için bir yaklaşım vermişlerdir.

#### 4.2.1.2 Werners' in Yaklaşımı – Simetrik Olmayan Model

Werners, bulanık toplam kaynakların veya bulanık eşitsizlik kısıtları yüzünden denklem (4.3) teki amaç fonksiyonunun bulanık olması gerektiğini öne sürdü. Daha önceki bölüme benzer şekilde, bulanık kaynaklar için  $p_i$  toleransları mevcut ve verilmiş olduğunu farzettii. Bu durumda denklem (4.3)' ü çözmek için Werners ilk olarak  $z^0$  ve  $z^1$  i aşağıdaki gibi tanımlamıştır:

$$z^0 = \max cx$$

$$(Ax)_i \leq b_i, \forall i, x \geq 0$$

$$z^1 = \max cx$$

$$(Ax)_i \leq b_i + p_i, \forall i, x \geq 0 \quad (4.7)$$

Buradan  $z^0$  ve  $z^1$  i kullanarak amaç için, sürekli azalmayan lineer üyelik fonksiyonu oluşturabiliriz. Optimal çözüm,  $z^0$  ve  $z^1$  arasında olacağından optimal çözümün sağlanması, değeri arttıkça artacaktır. Amacın üyelik fonksiyonu  $\mu_0$  (Şekil 4.7):

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & cx > z^1 \\ 1 - (z^1 - cx)/(z^1 - z^0) & z^0 \leq cx \leq z^1 \\ 0 & cx < z^0 \end{cases} \quad (4.8)$$

şeklindedir.

Yukarıdaki üyelik fonksiyonu ile birlikte, optimal kararı elde etmek için max-min operatörlerini kullanabiliriz. Böylece denklem (4.3), “ $\max_{x \geq 0} \alpha, \alpha = \min[\mu_0(x), \dots, \mu_m(x)]$  de” denkleminin çözümüyle çözülür yani:

$$\max \alpha$$

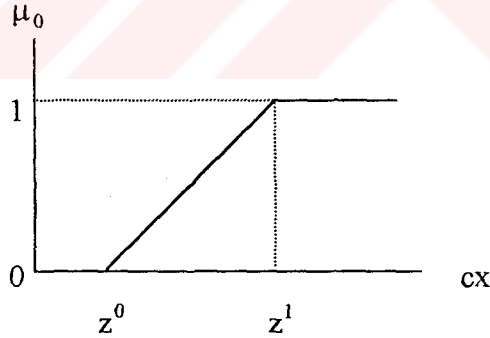
$$\mu_0(x) \geq \alpha$$

$$\mu_i(x) \geq \alpha, \forall i$$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0 \text{ dır.}$$

$$(4.9)$$

Denklem (4.9) Zimmermann tarafından önerilen modele benzer olan simetrik modeldir (Bölüm 4.2.2.1). Fark, amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonudur.



Şekil 4.7 Amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonu

#### 4.2.1.2a Örnek : Knox Üretim-Karışım Seçme Problemi

Bir önceki örneği yeniden ele alalım. Kesin LP probleminin çözümünde de görüldüğü gibi, Y malzemesi kısıtı için 120 birim kullandıktan sonra elimizde pek çok boşta kaynak kalmaktadır. Şimdi, Y malzemesinin kısıtı olarak 80 birim kullandığımızı farzedelim ve işçi-gücü, Y ve Z malzemelerinin toleransları sırasıyla 5,40 ve 30 olsun. Problemimiz bu durumda:



$$\max \quad z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq \tilde{15}$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq \tilde{80}$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq \tilde{100}$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

olur.

Burada  $i$ -inci bulanık kısıtı için üyelik fonksiyonu  $\mu_i(x)$ ' tir,  $\forall i$ :

$$\mu_1(x) = \begin{cases} 1 & g_1(x) < 15 \\ 1 - [g_1(x) - 15]/5 & 15 \leq g_1(x) \leq 20 \\ 0 & g_1(x) > 20 \end{cases}$$

$$\mu_2(x) = \begin{cases} 1 & g_2(x) < 80 \\ 1 - [g_2(x) - 80]/40 & 80 \leq g_2(x) \leq 120 \\ 0 & g_2(x) > 120 \end{cases}$$

$$\mu_3(x) = \begin{cases} 1 & g_3(x) < 100 \\ 1 - [g_3(x) - 100]/30 & 100 \leq g_3(x) \leq 130 \\ 0 & g_3(x) > 130 \end{cases}$$

şeklindedir.

Daha sonra, denklem (4.7)' nin çözümüyle:

$$z^0 = z^*(\theta = 0) = 99.29$$

$$z^1 = z^*(\theta = 1) = 130$$

elde edilir.

Burada  $\theta$  yeni parametrik programlama problemindeki parametredir. Bu durumda simetrik LP problemi şu şekilde formüle edilebilir:

$$\max \alpha$$

$$\mu_0 \geq \alpha$$

$$\mu_i \geq \alpha, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\alpha \in [0,1]$$

Burada bulanık amacın üyelik fonksiyonu  $\mu_0$ :

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & z > 130 \\ 1 - (130 - z)/(130 - 99.29) & 99.29 \leq z \leq 130 \\ 0 & z < 99.29 \end{cases}$$

şekilde tanımlanmıştır.

Bu problem aslında aşağıdakine denktir:

$$\min \theta$$

$$z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 130 - 30.71\theta$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5\theta$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40\theta$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30\theta$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \quad \text{ve} \quad \theta \in [0,1]$$

$\theta = 1 - \alpha$ 'dır. Gerçekte kullanılan kaynaklar işçi-gücü, Y malzemesi ve Z malzemesi için sırasıyla 17.5, 86.78 ve 115.01 olduğunda çözüm:

$$x^* = (8.57, 0, 8.93, 0) \quad \text{ve} \quad \theta = 0.5 \quad \text{te} \quad z^* = 114.65\$ \text{ 'dır.}$$

#### 4.2.2 Bulanık Kaynaklı ve Bulanık Amaçlı Lineer Programlama Problemi

Burada, daha önceki bölümlerde bahsedildiği gibi, aynı nedenlerden ötürü aşağıdaki iki problem birbirine denktir.

$$\begin{aligned} \tilde{\text{m}}\ddot{\text{a}}\text{x} \quad z &= cx \\ (Ax)_i &\leq \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.10.a}$$

ve

$$\begin{aligned} \tilde{\text{m}}\ddot{\text{a}}\text{x} \quad z &= cx \\ (Ax)_i &\leq \tilde{b}_i, \quad i = 1, 2, \dots, m \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.10.b}$$

Denklem (4.10)' u çözmek için Zimmermann ve Chanas tarafından önerilen metotlar bu bölümde sunulmuştur.

##### 4.2.2.1 Zimmermann' ın Yaklaşımı – Simetrik Model

Bu yaklaşımda,  $b_0$  amacı ve ona karşılık gelen bulanık amacın toleransı  $p_0$  başlangıçta verilmekte ve aynı zamanda bulanık kaynaklar için de  $b_i$  ve ona karşılık gelen toleranslar  $\forall i$  için  $p_i$ ' de verilmektedir. Daha sonra, bulanık amaç ve bulanık kısıtlar ve onlara karşılık gelen bölgeler,  $\forall i$  için,  $[b_i, b_i + p_i]$  aralığında tanımlanmaktadır. Buradan, denklem (4.10)' u göz önünde bulundurarak  $x^*$  i bulmak için:

$$\begin{aligned} cx &\geq b_0 \\ (Ax)_i &\leq b_i, \quad \forall i, \\ x &\geq 0 \end{aligned} \tag{4.11}$$

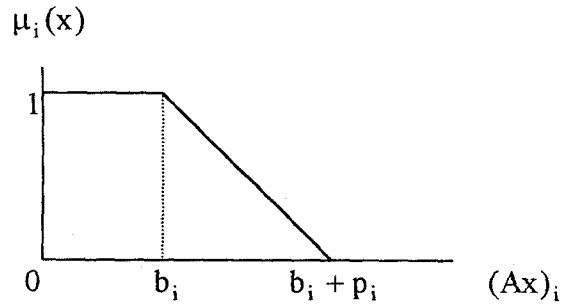
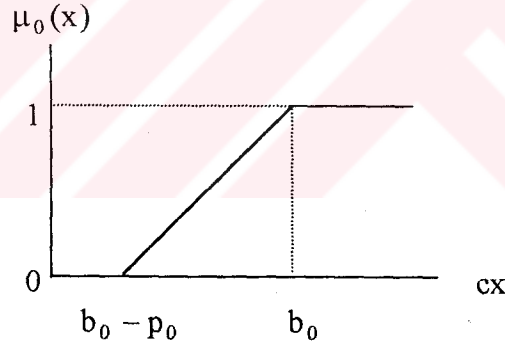
şeklinde düşünülür.

Bulanık küme teorisinde; bulanık amaç fonksiyonu ve bulanık kısıtlar, onlara karşılık gelen üyelik fonksiyonları ile tanımlanmaktadır. Burada bulanık amacın  $\mu_0$  üyelik fonksiyonunu, azalmayan sürekli lineer fonksiyon ve kısıtların,  $\forall i$  için,  $\mu_i$  üyelik fonksiyonlarının, artmayan sürekli lineer fonksiyon:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & cx > b_0 \\ 1 - (b_0 - cx)/p_0 & b_0 - p_0 \leq cx \leq b_0 \\ 0 & cx < b_0 - p_0 \end{cases} \quad (4.12)$$

$$\mu_i(x) = \begin{cases} 1 & (Ax)_i < b_i \\ 1 - [(Ax)_i - b_i]/p_i & b_i \leq (Ax)_i \leq b_i + p_i \\ 0 & (Ax)_i > b_i + p_i, \forall i. \end{cases} \quad (4.13)$$

şeklinde olduğu varsayalım. (Şekil 4.8).



Şekil 4.8 Bulanık amaç kısıtı  $cx \geq \tilde{b}_0$  ve  $i$ -inci bulanık kısıtı  $(Ax)_i \leq \tilde{b}_i$  için üyelik fonksiyonları

Zimmermann denklem (4.11)' i çözmek için, Bellman ve Zadeh' in max-min operatörlerini kullandı. Böylece optimal çözüm:

$$\max \mu_D = \max \{ \min [\mu_0(x), \mu_1(x), \dots, \mu_m(x)] \} \quad (4.14)$$

şeklinde ifade edilebilir. Burada  $\mu_D$  karar uzayı olan  $D$ ' nin üyelik fonksiyonudur ve  $\mu_D = \min (\mu_0, \mu_1, \dots, \mu_m)$ ' dir.

Eğer  $\alpha = \mu_D$  ise denklem (4.14) ile denklem (4.11) denk olacaktır:

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ & \mu_0(x) = 1 - (b_0 - cx) / p_0 \geq \alpha \\ & \mu_i(x) = 1 - [(Ax)_i - b_i] / p_i \geq \alpha, i = 1, \dots, m \\ & \mu_i(x), \forall i \text{ ve } \alpha \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.15)$$

veya

$$\begin{aligned} \max \quad & \alpha \\ & cx \geq b_0 - (1 - \alpha)p_0 \\ & (Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)p_i, \forall i \\ & x \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.16)$$

Burada  $\forall i$  için;  $c, A, b_0, p_0, b_i$  ve  $p_i$  başlangıç olarak verilmiştir.

Açıkça görülüyor ki denklem (4.16) kesin bir lineer programlama problemidir. Tek bir optimal çözüm elde edilebilir. Bu yaklaşımın, bulanık kaynaklı ve bulanık amaçlı bir LP problemi için ilk pratik metot olarak bilindiğinin belirtilmesi gerekir.

#### 4.2.2.1a Örnek : Knox Üretim-Karışım Seçme Problemi

Önceki üretim-karışım seçme problemi ele alınsın ve  $b_0 = 111.57$  ve  $p_0 = 10$  olduğu varsayılınsın. Problemimiz,  $x^*$  i bulmak için:

$$g_0(x) = z = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 111.57$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

haline gelir. Burada bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları önceki bölümlerde tanımlanmıştır ve bulanık amacın  $\mu_0$  üyelik fonksiyonu:

$$\mu_0(x) = \begin{cases} 1 & g_0(x) > 111.57 \\ 1 - [111.57 - g_0(x)]/10 & 101.57 \leq g_0(x) \leq 111.57 \\ 0 & g_0(x) < 101.57 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. O zaman denk olan problem:

$$\max \quad \alpha$$

$$g_0(x) = 4x_1 + 5x_2 + 9x_3 + 11x_4 \geq 111.57 - 10(1 - \alpha)$$

$$g_1(x) = x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \leq 15 + 5(1 - \alpha)$$

$$g_2(x) = 7x_1 + 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 \leq 80 + 40(1 - \alpha)$$

$$g_3(x) = 3x_1 + 5x_2 + 10x_3 + 15x_4 \leq 100 + 30(1 - \alpha)$$

$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1]$$

şeklinde olup kullanılan kaynaklar işçi gücü, Y malzemesi ve Z malzemesi için sırasıyla 16.51, 81.57 ve 109.03 olduğunda,

Çözüm:  $x^* = (8.01, 0, 8.50, 0)$  ve  $\alpha = 0.70$ 'te  $z^* = 108.54\$$ ' dir.

#### 4.2.2.2 Chanas' ın Yaklaşımı – Simetrik Olmayan Model

Denklem (4.10) için, Chanas  $b_0$  amacı ve onun  $p_0$  toleransının başlangıçta belli olamayacağını düşündü. Sebebi de bulanık uygun bölge hakkındaki bilgisizlikti. Bu yüzden  $b_0$  ve  $p_0$ ' ı belirleme konusunda Chanas, karar vericiye yardımcı olmak için ilk olarak aşağıdaki problemleri çözer ve daha sonra sonuçları tekrar karar vericiye  $b_0$  ve  $p_0$ ' ı belirlemesi için sunar:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & (Ax)_i \leq \tilde{b}_i, \forall i \\ & x \geq 0 \end{aligned} \quad (4.17)$$

burada her  $b_i$  için  $p_i$  toleransı verilmiştir ve bulanık kısıtların üyelik fonksiyonları denklem (4.13)' teki gibi düşünülmüştür. Daha sonra  $\mu_i \geq 1 - [(Ax)_i - b_i] / p_i \geq \alpha, \forall i$  elde ederiz ki bu da  $(Ax)_i \leq b_i + (1 - \alpha)p_i, \forall i$ ' ye denktir. Eğer  $\theta = 1 - \alpha$  olursa, daha sonra  $(Ax)_i \leq b_i + \theta p_i$  olacaktır. Açıkça görülüyor ki, denklem (4.17) aşağıdaki parametrik programlamaya denktir:

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & (Ax)_i \leq b_i + \theta p_i, \forall i \\ & x \geq 0 \text{ ve } \theta \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.18)$$

burada  $\forall i$  için  $c, A, b_i, p_i$  verilmiştir ve  $\theta$  bir parametredir. Her  $\theta$  parametresi için,  $x^*(\theta)$  çözümü elde edilmektedir, bu koşul:

$$\mu_i(Ax^*(\theta)) \geq 1 - \theta, \forall i \text{ için geçerlidir.}$$

Öte yandan her sıfır olmayan temel çözüm için (eğer  $p_i > 0$  ise) en azından bir tane  $\mu_i(Ax^*(\theta)) \geq 1 - \theta$  (veya  $(Ax)_i = b_i + \theta p_i$ ) olacak şekilde  $i$  aktif kısıtı vardır ve bunun neticesi olarak kısıtların ortak tatmin derecesi:

$$\mu_c(Ax^*(\theta)) = A_1 \mu_1((Ax^*(\theta)) = 1 - \theta \quad (4.19)$$

olur.

Buradan her  $\theta$  için (eğer varsa)  $1-\theta$  derecesi ile birlikte kısıtları sağlayan bir çözüm elde edilir.

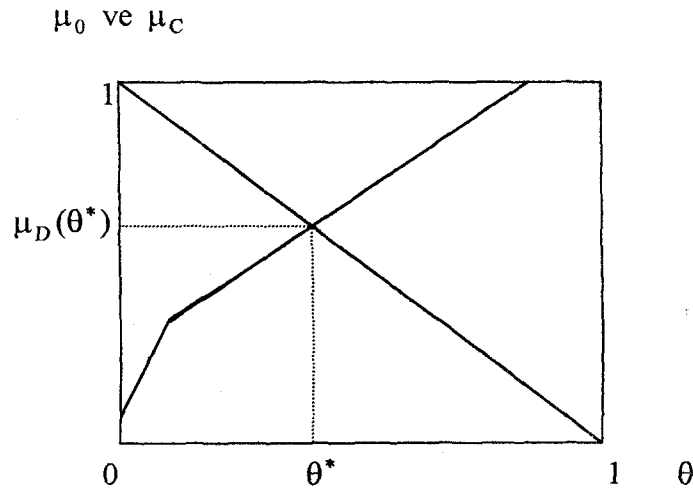
Denklem (4.18)' in optimal çözümleri  $z^*(\theta)$  ve  $x^*(\theta)$ , daha sonra karar vericiye sunulur. Karar verici şimdi  $b_0$  ve ona karşılık gelen  $p_0$ ' ı seçebilir. Bu değerlere göre amaç fonksiyonunun  $\mu_0$  üyelik fonksiyonu (4.12) deki gibi oluşturulur. Kesin optimal çözüm  $x^*(\theta)$ ' da var olacağından  $\mu_0$  şöyle olur:

$$\mu_0(x^*(\theta)) = \begin{cases} 1 & cx^*(\theta) > b_0 \\ 1 - [b_0 - cx^*(\theta)]/p_0 & b_0 - p_0 \leq cx^*(\theta) \leq b_0 \\ 0 & cx^*(\theta) < b_0 - p_0 \end{cases} \quad (4.20)$$

Denklem (4.18)' de bulanık kısıt kümesinin  $\mu_C$  tüm üyelik fonksiyonu  $1-\theta$ ' dır ve min operatörünü kullanarak bulunur. Bu yüzden kesin optimal çözüm  $x^*(\theta)$  ve  $z^*(\theta)$  :

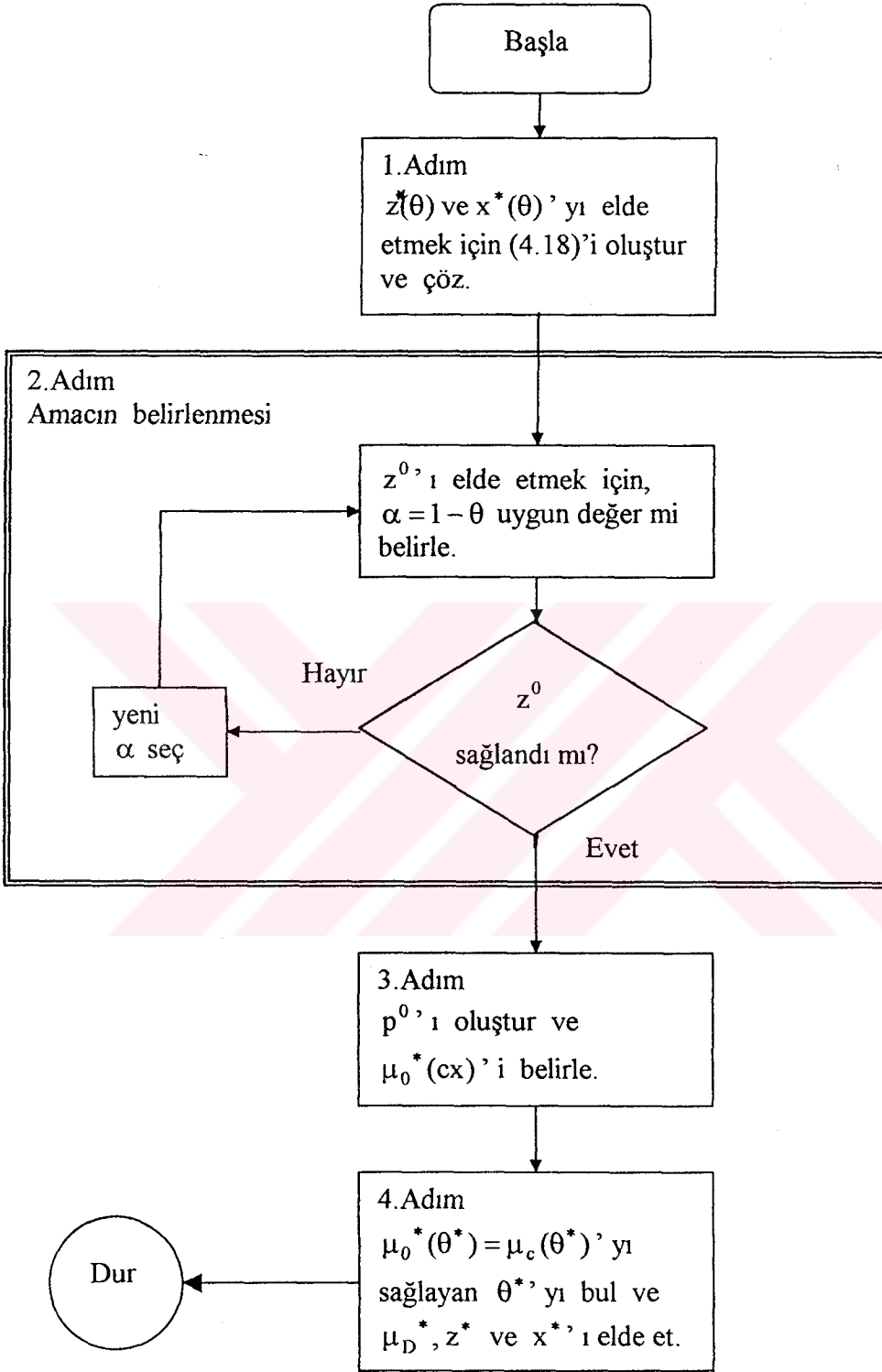
$$\max \mu_D(\theta) = \max \{ \min [\mu_0(\theta), \mu_C(\theta)] \} = \max [\mu_0(\theta) \wedge \mu_C(\theta)] \quad (4.21)$$

da var olur. (Şekil 4.9). Bu yaklaşımı daha iyi açıklayabilmek için Şekil 4.10' da bir algoritma düşünüldü.



Şekil 4.9  $\mu_0$  ve  $\mu_C$ ' nin kesişimi





Şekil 4.10 Chanas'ın yaklaşımının prosedür çözüm yolu (algoritması)

#### 4.2.2.2a Örnek : Bir Optimal Sistem Dizayn Problemi

Zeleny tarafından önerilen bir optimal sistem dizayn problemini ele alalım. Zeleny, modern üretim sistemlerinin, artan bir şekilde yeni alışılmamış yüksek verimlilik nitelikleri (minimal tamponlar, sifıra yakın envanterler, kaynaklardan tam istifade, kaynak portfolyoları ve benzeri...) tarafından karakterize edildiğini ileri sürdü. Bundan dolayı kesin (crisp) lineer programlama (KLP) ve onun matematiksel ayrılmaz parçası olan kaynakların yararlılığı altında, amacın tek fikirliliği ve sabit üzerine yerleştirmenin, bu yeni gereksinimleri karşılamak için yeterince esnek ve zengin olmadığı izlenimini verdi.

Burada bir bulanık çevre içindeki basitleştirilmiş optimal dizayn örneği ele alınıp çözüldü. Amaç ve kısıtlar bulanıklaştırıldı.

Küçük bir firma, son birkaç Noel mevsimi için, oldukça yüksek karlı dekoratif malzeme üretiyor. Bu dekoratif malzeme  $x$  ve  $y$  olmak üzere iki çeşittir ve beş farklı bileşenden oluşmaktadır. Bunlar: altın iplik, ipek, kadife, gümüş iplik ve naylondur. Bu girdilerin fiyatları ve onların hem  $x$ ' e hem de  $y$ ' ye olan teknolojik katkıları Tablo 4.6' da verilmiştir. Kar payları (miktarları)  $x$  için birim başına 400\$ ve  $y$  için birim başına 300\$' dir.

Çizelge 4.6 Girdiler ve teknolojik katsayılar

Kaynaklar	Teknolojik Katsayılar		Fiyat/Birim \$
	$x$	$y$	
altın iplik	4	0	30
ipek	2	6	40
kadife	12	4	9.5
gümüş iplik	0	3	20
naylon	4	3	10

Bu miktarları elde edebilmek için firma, 2600\$' dan fazlasını bu bileşenlerin alımı için harcamaya izin vermemektedir. Eğer karar verici 2600\$' ı, 20, 24, 60, 10.5, 26 birim sırasıyla altın iplik, ipek, kadife, gümüş iplik, naylon almak için harcarsa aşağıdaki lineer programlama elde edilir ve verilen durum için aşağıdaki optimal üretim programı elde edilmektedir:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 400x + 300y && (\text{kar}) \\
 & 4x \leq 20 && (\text{altın iplik}) \\
 & 2x + 6y \leq 24 && (\text{ipek}) \\
 & 12x + 4y \leq 60 && (\text{kadife}) \\
 & 3y \leq 10.5 && (\text{gümüş iplik}) \\
 & 4x + 3y \leq 26 && (\text{naylon})
 \end{aligned}$$

Grafik tekniğiyle, çözüm  $x^* = (3.125, 2.625)$  ve optimal kar 2037.5\$' dir.

Yukarıdaki problem aşağıdaki gibi bulanık lineer yüksek-verimlilik sistem programlama modeli şeklinde formüle edilirse :

$$\begin{aligned}
 \max \quad & 400x + 300y && (\text{kar}) \\
 & 4x = b_1 && (\text{altın iplik}) \\
 & 2x + 6y = b_2 && (\text{ipek}) \\
 & 12x + 4y = b_3 && (\text{kadife}) \\
 & 3y = b_4 && (\text{gümüş iplik}) \\
 & 4x + 3y = b_5 && (\text{naylon}) \\
 & 30b_1 + 40b_2 + 9.5b_3 + 20b_4 + 10b_5 \leq \widetilde{2600} && (\text{bütçe}) \\
 & x, y, b_1, b_2, b_3, b_4, b_5 \geq 0
 \end{aligned}$$

şeklinde olur.

Burada  $b_i, i=1, \dots, 5$  olmak üzere optimal kaynak seviyeleridir ve sıfıra yakın envanterli yüksek verimlilik sistemlerini elde etmekte kullanılır. Çözüm işlemleri aşağıdaki gibidir:

**1. Adım:** Bütçe kısıtı için maksimum toleransın 200\$ olduğu varsayalım, o zaman parametrik programlama :

$$\max 400x + 300y$$

$$30(4x) + 40(2x + 6y) + 9.5(12x + 4y) + 20(3y) + 10(4x + 3y) = 354x + 368y \leq 2600 + 200\theta$$

$$x, y \geq 0 \text{ ve } \theta \in [0,1]$$

şeklinde olur.

Optimal çözüm:  $x^* = ((2600 + 200\theta)/354, 0)$  ve  $z^*(\theta) = (400/354)(2600 + 200\theta)$  dir.

**2. Adım:** Kolaylık için,  $z_0 = 3100$  değeri kar amacının hedefi olarak düşünülün.

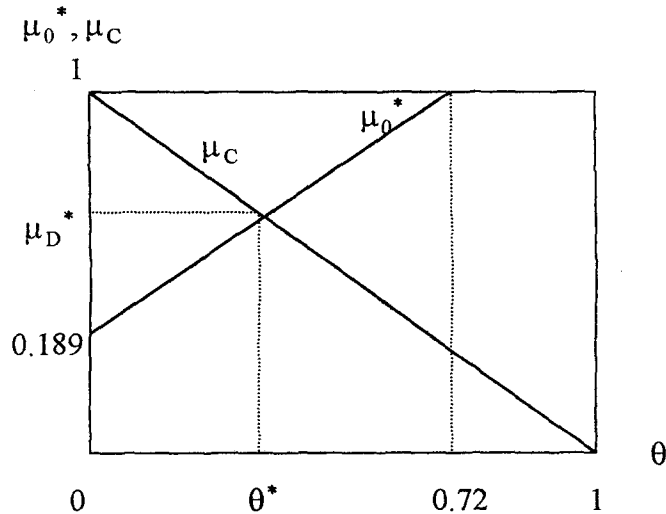
**3. Adım:**  $p_0 = 200$  olduğu ve kar amacının üyelik fonksiyonunun denklem (4.12)'deki gibi lineer olduğu farzedilsin. Bu durumda aşağıdaki üyelik elde edilir:

$$\mu_0^*(\theta) = 1 - \frac{3100 - 400(2600 + 200\theta)/354}{200} = 0.189 + 1.13\theta$$

**4. Adım:**  $\mu_C = \mu_0$ , Şekil 4.11'de gösterilmiştir.  $0.189 + 1.13\theta = 1 - \theta$  elde edilir ve  $\theta = 0.38$  olduğunda  $\mu_D^* = \mu_0 = \mu_C = 1 - 0.38 = 0.62$  olarak bulunur. Optimal çözüm:  $x^* = [2600 + 200(0.38)]/354 = 7.56$ ,  $y^* = 0$  ve  $z^* = 3023.73\$$ ' dir.

$b_1^* = 30.24$ ,  $b_2^* = 15.12$ ,  $b_3^* = 90.72$ ,  $b_4^* = 0$  ve  $b_5^* = 30.24$  ve bütçe 2676.24\$ olup gerekli kaynaklardır.

Çizelge 4.7 kesin lineer programlama ile yüksek-verimlilik için bulanık lineer programlama çözümleri arasındaki farkları göstermektedir.



Şekil 4.11 Bulanık optimal sistem dizayn probleminin optimal çözümü

Çizelge 4.7 Yüksek-verimlilik için bulanık çözüm ve kesin çözümün karşılaştırılması

Kesin standart sistem	Yüksek-verimlilik için bulanık sistem
$x^* = 4.125$	$x^* = 7.56$
$y^* = 2.625$	$y^* = 0$
Kar	
$z^* = 2037.5\$$	$z^* = 3023.73$
Bütçe = 2600\$	2676.24\$
Kaynaklar	
$b_1 = 20$	$b_1^* = 30.24$
$b_2 = 24$	$b_2^* = 15.12$
$b_3 = 60$	$b_3^* = 90.72$
$b_4 = 10.5$	$b_4^* = 0$
$b_5 = 26$	$b_5^* = 30.24$

#### 4.2.3 Amaç Fonksiyonunda Bulanık Parametrelili Lineer Programlama Problemi

Genellikle birim kar veya maliyet kesin olarak belirlenememektedir. Dolayısıyla, amaç fonksiyonunda, kesin olmayan katsayılı lineer programlamayı göz önünde bulundurmaya gerekir. Bu problem:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & \tilde{c}x \\
 & (Ax)_i \leq b_i, \forall i \\
 & x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.22}$$

şeklinde formüle edilebilir. Denklem (4.22) için, Verdegay aşağıdaki denk parametrik lineer programlamayı önermiştir:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & cx \\
 & \mu(c) \geq 1 - \alpha \\
 & (Ax)_i \leq b_i, \forall i \\
 & \alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0
 \end{aligned} \tag{4.23}$$

Burada  $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ ,  $\mu(c) = \inf_j \mu_j(c_j)$  dir ve  $\mu(c)$ ,  $cx$ ' in üyelik fonksiyonu,  $\forall j$  için  $\mu_j(c_j)$ ,  $c_j$ ' nin üyelik fonksiyonudur. Denklem (4.23) ile verilen problem :

$$\begin{aligned} \max \quad & cx \\ & \mu_j(c_j) \geq 1 - \alpha, \forall j \\ & (Ax)_i \leq b_i, \forall i \\ & \alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0 \end{aligned}$$

a denktir.

Bu da:

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_j c_j x_j \\ & c_j \geq \mu_j^{-1}(1 - \alpha), \forall j \\ & (Ax)_i \leq b_i, \forall i \\ & \alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0 \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \max \quad & \sum_j \mu_j^{-1}(1 - \alpha) x_j \\ & (Ax)_i \leq b_i, \forall i \end{aligned}$$

$$\alpha \in [0,1] \text{ ve } x \geq 0 \text{ ' a denktir.} \quad (4.24)$$

Açıkça görüldüğü gibi, denklem (4.24) bir parametrik programlama problemidir, dolayısıyla denklem (4.24)' ün çözümüyle denklem (4.22)' nin çözümü elde edilir. Bu çözüm bulanıktır ve bulanık amaç kümesinin her  $(1 - \alpha)$  kesiti için çözüm tercihin bir  $\alpha$  derecesine sahiptir.

Diğer yandan, Verdegay; denklem (4.22) veya (4.3) gibi, verilmiş bir BLP için daima başka bir çiftinin (eşinin) olduğunu ve aynı bulanık çözüme sahip olduğunu önermiştir. Dolayısıyla, denklem (4.22)' nin çifti olan problem, Bölüm 4.2.2' de tartışılan yaklaşımların kullanımıyla çözülebilir.

Denklem (4.6)'nin benzeri olan problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & [b + p(1 - \alpha)]u \\ & uA^T \geq c, \quad u \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1] \end{aligned} \quad (4.25)$$

şeklinde olup bu da:

$$\begin{aligned} \min \quad & au \\ & a = b + p(1 - \alpha) \\ & uA^T \geq c, \quad u \geq 0 \text{ ve } \alpha \in [0,1] \text{ 'a denktir.} \end{aligned}$$

$\beta = 1 - \alpha$  olsun. Problem:

$$\begin{aligned} \min \quad & au \\ & a \leq b + p\beta \quad (\Leftrightarrow 1 - [b_i - a_i]/p_i \geq 1 - \beta, \quad \forall i) \\ & uA^T \geq c, \quad u \geq 0 \text{ ve } \beta \in [0,1] \end{aligned}$$

veya

$$\begin{aligned} \min \quad & au \\ & \mu_i(a_i) \geq 1 - \beta, \quad \forall i \\ & uA^T \geq c, \quad u \geq 0 \text{ ve } \beta \in [0,1] \end{aligned}$$

halini alır. Son olarak:

$$\begin{aligned} \min \quad & au \\ & uA^T \geq c, \quad u \geq 0 \text{ 'ı elde edilir.} \end{aligned} \quad (4.26)$$

Sonuç olarak, amaç fonksiyonunda bulanık parametrelili lineer programlama Bölüm 4.2.1' de tartışılan yaklaşımlarla çözülebilir.

#### 4.2.4 Tüm Katsayıları Bulanık Olan Lineer Programlama

Bazen lineer programlamanın tüm katsayıları kesin olmayabilir. Bu problem aşağıdaki gibi formüle edilebilir:

$$\begin{aligned} \max \quad & \tilde{c}x \\ (\tilde{A}x)_i & \leq \tilde{b}_i, \forall i \\ x & \geq 0 \end{aligned} \quad (4.27)$$

Denklem (4.27) için, Carlsson ve Korhonen tümüyle takas yaklaşımını önerdiler. Onlar Chanas'ın yaklaşımının, kısıtın aşılması dereceleri arasında herhangi sürekli takası göz önünde bulundurmadığını tartıştılar. Örneğin, eğer  $\mu_1 = 1 - \theta_1$  ve  $\mu_i > 1 - \theta_1$ ,  $i=1,2,\dots,m$  ise  $\mu_C = 1 - \theta_1$ 'dir. Sonuç olarak, daha iyi olası çözüm  $i=2,\dots,m$  ve  $\mu_i \geq 1 - \theta_2$  takasıyla  $1 - \theta_1$ 'den büyük olan  $\mu_i$ 'nin  $1 - \theta_1$ 'ye serbest bırakılmasıyla ortaya çıkar.

Şu açıktır ki  $\theta_2$ ,  $\theta_1$ 'den küçük olacaktır. Dolayısıyla daha yüksek tatmin dereceli daha iyi bir çözüm  $\mu_D = \mu_0 = \mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_m = 1 - \theta_2$  ile elde edilebilir.

Çözüm işlemine girmeden önce denklem (4.27)'nin bulanık olmayan versiyonunun  $z^* = z^*(c, -A, b)$  çözümü,  $c, -A, b$  parametrelerinin artan bir fonksiyonudur. Ayrıca kullanıcının, parametrelerin olası değerleri için  $[c^0, c^1], [A^0, A^1]$  ve  $[b^0, b^1]$  aralıklarını açıkça belirleyebileceği farzedilir. Alt sınırlar, çözümün uygulanabilir olduğu risksiz bölgeleri göstermektedir. Üst sınırlar ise, gerçek üstü ve mümkün olmayan parametre değerlerini gösterir ve bu değerlerin kullanımıyla elde edilen çözümler uygulanabilir değildir. "Risksiz" parametre değerlerinden "mümkün olmayan" parametre değerlerine doğru hareket edildiğinde, yüksek dereceli çözümlerden düşük dereceli çözümlere doğru gidilir (güvenli olandan optimistik-iyimser çözümlere doğru). Daha sonra iş, parametredeki belirsizlik derecelerinin bir fonksiyonu olarak optimal bir "uzlaşma"ya varmaktır.



Carlsson ve Korhonen, denklem (4.27)' nin çözümü ve parametreleri arasında bir bağıntı önerdi: denklem (4.27)' nin çözümü,  $z^* = z^*(c, -A, b)$  olup  $c, -A, b$  parametrelerinin artan bir fonksiyonudur. Dolayısıyla, üyelik fonksiyonlarını,  $c, -A, b$  parametrelerinin monoton azalan fonksiyonları olarak düşünmek mantıklıdır. Monoton azalan fonksiyonlar lineer, parçalı lineer, hiperbolik, üssel ve benzeri olabilir. Lineer olmayan üyelik fonksiyonlarını açıklayabilmek amacıyla Carlsson ve Korhonen tarafından önerilen üssel fonksiyonları ele alacağız. (Şekil 4.12' de).

$$\mu_c = a_c [1 - \exp\{-b_c(c - c^1)/(c^0 - c^1)\}] \quad (4.28)$$

Burada  $b_c > 0$  veya  $b_c < 0$ , ve  $a_c = 1/[1 - \exp(-b_c)]$  ve  $c \in [c^0, c^1]$ ' dir.

$c \leq c^0$  olduğunda  $\mu_c = 1$ ,  $c > c^1$  olduğunda  $\mu_c = 0$ ' dir.  $b_c$  karar verici tarafından belirlenir. Aynı şekilde  $A$  ve  $b$ ' nin üyelik fonksiyonları da elde edilebilir. Şunu da belirtmek gerekir ki maksimizasyon problemleri için amaç fonksiyonunun üyelik fonksiyonlarının azalmayan fonksiyon olması iyi olur. Bununla birlikte, burada Carlsson ve Korhonen' in orjinelliğini korumak gerekir.

$c, -A$  ve  $b$  arasındaki tüm takastan sonra çözüm :

$$\mu = \mu_c = \mu_A = \mu_b \text{ ' de} \quad (4.29)$$

her zaman mevcut olup aşağıdaki denklem elde edilir:

$$c = g_c(\mu), A = G_A(\mu) \text{ ve } b = g_b(\mu) \quad (4.30)$$

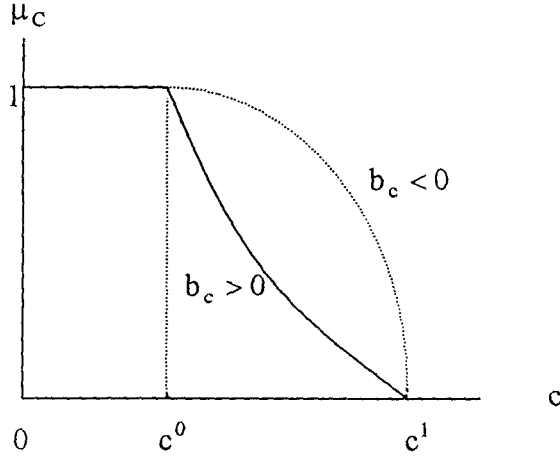
Burada  $\mu \in [0,1]$  ve ,  $\mu_c, \mu_A$  ve  $\mu_b$ ' nin ters fonksiyonları  $g_c, G_A$  ve  $g_b$ ' dir.

Denklem (4.27)' den:

$$\max [g_c(\mu)]x$$

$$[G_A(\mu)]x \leq g_b(\mu) \text{ ve } x \geq 0 \quad (4.31)$$

olur.



Şekil 4.12 Bulanık c kümesinin üyelik fonksiyonu

Açıkça görülüyor ki, denklem (4.31), bir lineer olmayan programlama problemidir. Bununla birlikte eğer  $\mu$  verilirse herhangi bir lineer programlama tekniğiyle çözülebilir. Böylece  $\mu$ 'lerin bir kümesine karşılık gelen çözümler kümesi elde edilir ve sonra bu  $(z^*, \mu)$  çözüm ikilileri grafiğe dökülür. Daha sonra, karar verici uygulama için kendi tercih ettiği çözümü seçebilir.

#### 4.2.4.1 Örnek: Bir Üretim Programlama Problemi

Bir üretim programlama problemini ele alalım. Bir deri ürünleri fabrikası 3 tip el çantası üretiyor. Bu el çantalarının geçmesi gereken dört iş merkezi ve işçi-saat gereksinimleri şu şekildedir. Bunlar : yarık açma [18,22), soyma [10,40), dikiş [96,110) ve bitirme [96,110). Girdi bilgileri bulanık parametreler olarak tanımlanır. Çünkü onlar tahmindirler ve doğada net bir şekilde belirtilemezler. Üç ürünün birim karları ve teknik katsayıları aşağıdaki lineer programlama modelinde veriliyor:

$$\begin{aligned}
 \max \quad & [1,1.5)x_1 + [1,3)x_2 + [2,2.2)x_3 \\
 & [3,2)x_1 + [2,0)x_2 + [3,1.5)x_3 \leq [18,22) \\
 & [1,0.5)x_1 + [2,1)x_2 + [1,0)x_3 \leq [10,40) \\
 & [9,6)x_1 + [20,18)x_2 + [7,3)x_3 \leq [96,110) \\
 & [7,6.5)x_1 + [20,15)x_2 + [9,8)x_3 \leq [96,110) \\
 & x_1, x_2, x_3 \geq 0
 \end{aligned}$$

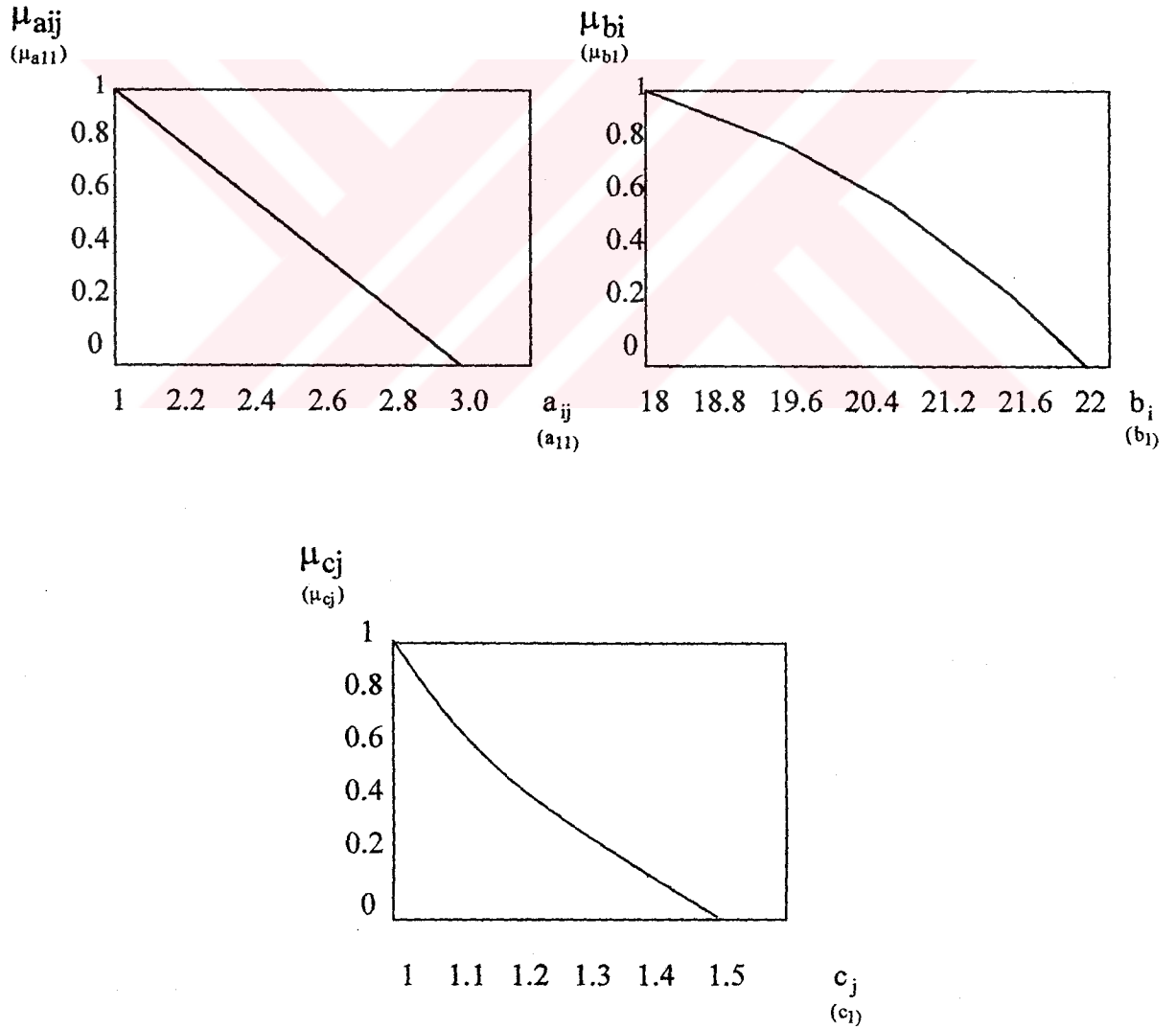
burada sayısal bilgi Carlsson ve Korhonen' e dayanmaktadır. c, A ve b' nin üyelik fonksiyonu (Şekil 4.13) şu şekilde farzedilsin:

$$\mu_{a_{ij}} = (a_{ij} - a_{ij}^1) / (a_{ij}^0 - a_{ij}^1)$$

$$\mu_{b_i} = \{1 - \exp[-0.8(b_i - b_i^1) / (b_i^0 - b_i^1)]\} / [1 - \exp(-0.8)]$$

$$\mu_{c_j} = \{1 - \exp[3(c_j - c_j^1) / (c_j^0 - c_j^1)]\} / [1 - \exp(3)]$$

burada (-0.8) ve (3) sabitleri karar verici tarafından belirlenmekte olup ayrıca, pozitif sayı konveks üssel fonksiyon ve negatif sayı konkav üssel fonksiyon olmasını gerektirmektedir.



Şekil 4.13 Bulanık katsayıların üyelik fonksiyonları

Daha sonra  $\forall i, j$  için  $a_{ij}, b_i, c_j$  bulanık sayılarının arasında mutlak takas varsayımı ile birlikte yapılan dönüşüm boyunca :

$$a_{ij} = a_{ij}^1 + \mu(a_{ij}^0 - a_{ij}^1)$$

$$b_i = b_i - (1/0.8)\ln\{1 - \mu_{b_i}[1 - \exp(-0.8)]\}(b_i^0 - b_i^1)$$

$$c_j = c_j + (1/3)\ln\{1 - \mu_{c_j}[1 - \exp(3.0)]\}(c_j^0 - c_j^1)$$

elde edildi. Buradan mutlak takaslı orijinal BLP :

$$\max [1,5 - 0,167\ln(1 + 19,1\mu)]x_1 + [3 - 0,667\ln(1 + 19,1\mu)]x_2 + [2,2 - 0,067\ln(1 + 19,1\mu)]x_3$$

$$(2 + \mu)x_1 + (2\mu)x_2 + (1,5 + 1,5\mu)x_3 \leq 22 + 5\ln(1 - 0,55\mu)$$

$$(0,5 + 0,5\mu)x_1 + (1 + \mu)x_2 + (\mu)x_3 \leq 40 + 37,5\ln(1 - 0,55\mu)$$

$$(6 + 3\mu)x_1 + (18 + 2\mu)x_2 + (3 + 4\mu)x_3 \leq 110 + 17,5\ln(1 - 0,55\mu)$$

$$(6,5 + 0,5\mu)x_1 + (15 + 5\mu)x_2 + (8 + \mu)x_3 \leq 110 + 17,5\ln(1 - 0,55\mu)$$

$$\mu \in [0,1] \text{ ve } x_i \geq 0, \quad i = 1, 2, 3.$$

şeklindedir.

Açıkça görülüyor ki, yukarıdaki lineer olmayan programlama herhangi bir standart lineer programlama tekniğiyle çözülemez. Bununla birlikte, eğer  $\mu$  önceden belirlenmişse çözülebilir yani  $\mu$ ' nün her özel değeri ve orijinal çözüm için optimal çözüm elde edilebilir. Dolayısıyla,  $n$  sayıda optimal çözüm elde etmek için  $n$  sayıda deney seçilebilir ( $n$  farklı  $\mu$  değeri) ve bu optimal çözümler karar vericiye sunulur.

Çözüm işlemi aşağıdaki şekilde verilmiştir:

**1. Adım:**  $\mu = 0$ ' dan başlansın.  $n=10$  deney ve  $\delta = 0.1$  (sabit) olarak alınsın.

**2. Adım:** Lineer programlamanın çözümü:

$$\max 1.5x_1 + 3x_2 + 2.2x_3$$

$$2x_1 + 1.5x_3 \leq 22$$

$$0.5x_1 + x_2 \leq 40$$

$$6x_1 + 18x_2 + 3x_3 \leq 110$$

$$6.5x_1 + 15x_2 + 8x_3 \leq 110$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Optimal çözüm:  $x^* = (0, 0, 13.75)$  ve  $z^* = 30.25\$$ ' dir.

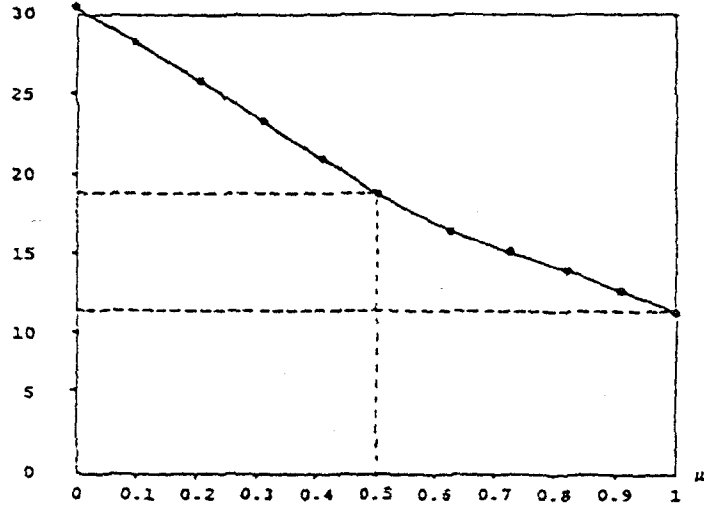
**3. Adım:**  $(\mu, z^*) = (0, 30.25)$  Şekil (4.14)' te gösterilmiştir. Sonra  $\mu = \mu + 0.1$  alınsın. Eğer  $\mu > 1$  ise 4.adıma geçilir. Aksi takdirde 2. adıma gidilir ve lineer programlamayı  $\mu = \mu + 0.1$  ile çözülür.

**4. Adım:** Şekil (4.14) ve Çizelge 4.8 optimal karlarla bunlara karşılık gelen üyelik dereceleri arasındaki ilişkiyi gösterir. Bu ilişkiye göre karar verici kendi optimal çözümünü, önceden belirlenmiş olası bir belirsizlik altında elde edebilir. Örneğin karar verici 0.3 derece belirsizliği olası (kabul edilebilir) olarak görüyorsa optimal çözüm  $z^* = 15.8$  ve  $x^* = (0, 2.53, 6.28)$  olur.

Çizelge 4.8 BLP' nin mutlak takas modeli için optimal çözümü

$\mu$	Kar	Karar	Kullanılan kaynaklar			
	$z^*$	$x^*$	$b_1$	$b_2$	$b_3$	$b_4$
0	30.25	(0, 0, 13.75)	19.9	0.0	39.8	110.0
0.1	28.35	(0, 0.17, 13.14)	21.7	1.5	47.7	109.1
0.2	26.02	(0, 0.73, 11.74)	21.4	3.1	58.0	108.0
0.3	23.76	(0, 1.22, 10.44)	21.1	4.7	66.5	106.8
0.4	21.60	(0, 1.64, 9.26)	20.8	6.0	73.4	105.7
0.5	19.55	(0, 1.99, 8.18)	20.4	7.1	78.7	104.4
0.6	17.62	(0, 2.29, 7.19)	20.0	8.0	82.8	103.1
0.7	15.80	(0, 2.53, 6.28)	19.6	8.7	85.5	101.4
0.8	14.24	(0, 0, 7.07)	19.1	5.7	43.8	62.2
0.9	13.08	(0, 0, 6.52)	18.8	5.9	43.0	58.0
1.0	12.00	(0, 0, 6)	18.0	6.0	42.0	54.0

Amaç değeri



Şekil 4.14 Optimal değerler ve onlara karşılık gelen üyelik dereceleri arasındaki ilişki



## 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Geleneksel matematiğin belirlilik ile sınırlı olan dünyasını, derecelendirme mekanizması ile belirsizliğe doğru genişleten L.A. Zadeh, özellikle Uzak Doğu' nun yoğun ilgi gösterdiği ve başarılı uygulamaları sayesinde tüm dünyaya yayılan bir paradigma değişimi gerçekleştirmiştir. Klasik küme teorisinden daha geniş bir çerçeveye yaratan bulanık küme teorisi, karar vericiye daha geniş bir hareket alanı sağlayarak, lineer programlamanın gerçek dünyayı yansıtmaya becerisine ve uygulanabilirliğine katkıda bulunmuştur. Başka bir ifadeyle; bulanık küme teorisinin lineer programlamaya önerdiği yaklaşımlar, gerçek dünyanın kompleks yapısının modellenmesinde daha başarılı olmuştur. Klasik lineer programlamanın belirsizliği kapsayacak şekilde genişletilmesi ile ortaya çıkan bulanık lineer programlamaya farklı çözüm yaklaşımları önerilmiştir. Çalışmada, belirsizliği farklı noktalardan ele almış bu yaklaşımlar incelenmiştir. Verdegay, sadece sağ taraf sabitlerini ( $b_i$ ) bulanık olarak alıp  $p_i$  kadar tolere etmiş ve bulanık lineer programlama problemine parametrik bir çözüm önermiştir. Werners ise, sağ taraf sabitleri ile birlikte amaç fonksiyonunun da bulanık olması gerektiğini düşünmüş, karar fonksiyonu için tanımladığı alt ve üst sınırlar ile bir karar aralığı oluşturmuş ve bulanık kısıtlar ile kesişiminden bulanık karara ulaşmıştır. Zimmermann, karar vericinin ulaşmak istediği amaç fonksiyonunun değeri için bir tatmin (istek) seviyesi tanımlamış ve kısıtların herbirinin bir bulanık küme olarak modellenebileceğini önermiştir. Chanas, önerdiği parametrik yaklaşım ile optimal çözümü bulurken karar vericiye kısıtlar ve amaç fonksiyonundaki değişikliklerin analizini yapma imkanını da sunmaktadır. Carlsson ve Korhonen ise, lineer programlamada tüm katsayıların bulanık olduğu durum için bir yaklaşım önermişlerdir.

Çalışma kapsamında, her bir tekniğin farklı belirsizlik anlayışları ile BLP' ye getirdikleri çözüm yaklaşımları incelenmiş olup ayrıca bu yaklaşımlara ait örnekler verilmiştir. Son yıllarda yapılan çalışmalar daha çok yapay zekanın diğer teknikleriyle (genetik algoritmalar, yapay sinir ağları vs..) birleştirilerek uygulama imkanı bulmuştur. Ancak bu çalışmalar yetersiz düzeydedir. Bugün Uzak Doğu' da bu konuda yapılan çalışmalar ve araştırmalar batı ülkelerinden çok öndedir. Özellikle uygulama konusundaki yetersiz literatür, yapılacak yeni çalışmalar sayesinde genişleyecektir.

**KAYNAKLAR**

Bandemar, H. ve Gottwold, S., (1996), Fuzzy Sets, Fuzzy Logic, Fuzzy Methods with Applications, Biddles Ltd., Great Britain.

Chen, S. J. ve Hwang, C. L., (1992), Fuzzy Multiple Attribute Decision Making, Springer-Verlag, Berlin.

Dubois, D. ve Prade, H., (1978), "Operations on Fuzzy Numbers", International Journal Systems Sciences, 9:357-360.

Evans, G. W., Karwowski, W. ve Wilhelm, M. R., (1989), Applications of Fuzzy Set Methodologies in Industrial Engineering, Elsevier Science, Amsterdam.

Kaufmann, A., (1973), Theory of Fuzzy Subsets, Academic Press, New York.

Kaufmann, A. ve Gupta, M. M., (1988), Fuzzy Mathematical Models in Engineering and Management Science, Elsevier Science, Amsterdam.

Kaufmann, A. ve Gupta, M. M., (1991), Introduction to Fuzzy Arithmetic: Theory and Applications, Van Nostrand Reinhold, New York.

Klir, G. J. ve Folger, T. A., (1988), Fuzzy Sets Uncertainty and Information, Prentice-Hall, Englewood Cliff, New York.

Lai, Y. J. ve Hwang, C. L., (1992), Fuzzy Mathematical Programming: Methods and Applications, Springer-Verlag, Berlin.

Mansur, Y., (1995), Fuzzy Sets and Economics: Applications of Fuzzy Mathematics to Non Cooperation Oligapoly, Edward Elgar Publishing Ltd., Great Britain.

Mete, E., (2001), Bulanık Matematiksel Programlama, Yüksek Lisans Tezi, YTÜ Fen Bilimleri Enstitüsü.

Önder, E., (2000), Askeri Müzeye Gelen Ziyaretçilerin Ziyaret Sürelerinin Fuzzy Matematiği ile Optimizasyonu, Yüksek Lisans Tezi, MÜ Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Öztürk, R. Ö., (1999), Fuzzy Karar Verme -Sabit Getirili Menkul Kıymetlerden Oluşan Portföyün Fuzzy Matematiği ile Değerlemesi-, Yüksek Lisans Tezi, MÜ Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Tanaka, H. ve Asai, K., (1997), An Introduction to Fuzzy Logic for Practical Applications, Springer-Verlog, New York.

Tuna, B., (1994), Bulanık Olasılıklar ve Bir Uygulama, Yüksek Lisans Tezi, MÜ Sosyal Bilimler Enstitüsü.

Zadeh, L. A., (1965), "Fuzzy Sets", Information and Control, 8:338-353.

Zimmermann, H. J., (1983), "Using Fuzzy Sets in Operational Research", European Journal of Operational Research, 13:201-216.



**ÖZGEÇMİŞ**

Doğum tarihi	13.03.1976	
Doğum yeri	İstanbul	
Lise	1991-1994	Maçka Akif Tuncel Teknik Lisesi Elektronik Bölümü
Lisans	1994-1999	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen-Edebiyat Fak. Matematik Bölümü
Yüksek Lisans	2000-2003	Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Anabilim Dalı, Matematik Programı

**Çalıştığı kurumlar**

2000-Devam M.E.B Gültepe İ.Ö.O