

**T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**ADOMIAN AYRIŞTIRMA (DECOMPOSITION) METODU İLE MODELLEME
ÖRNEKLERİ**

HACER AKYOL

**YÜKSEK LİSANS TEZİ
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ ANABİLİM DALI
MATEMATİK MÜHENDİSLİĞİ PROGRAMI**

**DANIŞMAN
PROF. DR. MUSTAFA BAYRAM**

İSTANBUL, 2012

T.C.
YILDIZ TEKNİK ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

**ADOMIAN AYRIŞTIRMA (DECOMPOSITION) METODU İLE MODELLEME
ÖRNEKLERİ**

Hacer AKYOL tarafından hazırlanan tez çalışması 27.06.2012 tarihinde aşağıdaki jüri tarafından Yıldız Teknik Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı'nda **YÜKSEK LİSANS TEZİ** olarak kabul edilmiştir.

Tez Danışmanı

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Eş Danışman

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Fatih Üniversitesi

Jüri Üyeleri

Prof. Dr. Mustafa BAYRAM
Yıldız Teknik Üniversitesi

Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN
Fatih Üniversitesi

Prof. Dr. Mustafa SİVRİ
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Gürsel YEŞİOT
Yıldız Teknik Üniversitesi

Doç. Dr. Nuran GÜZEL
Yıldız Teknik Üniversitesi

ÖNSÖZ

Bu çalışmada Adomian Ayrışım metoduyla ilgili genel bilgiler verilerek çeşitli denklem türleriyle ilgili örnekler çözülmüş ve metodun faydalarından bahsedilmiştir. Verilen bilgiler dahilinde metodun özümsemi amaçlanmıştır.

Çalışmalarımın yüksek lisans tezi olarak hazırlanmasında katkısı olan değerli hocam Prof. Dr. Mustafa BAYRAM' a, bu süreçte bilgisinden ve tecrübesinden yararlandığım saygıdeğer hocam Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN' e, Yıldız Teknik Üniversitesi Matematik Mühendisliği bölümünde görev yapan çok değerli hocalarıma, bu günlere gelmemde büyük katkıları olan, her durumda yanımda olarak bana destek veren aileme ve dostlarıma teşekkürlerimi sunarım.

Haziran, 2012

Hacer AKYOL

İÇİNDEKİLER

	Sayfa
SİMGE LİSTESİ.....	vi
KISALTMA LİSTESİ.....	vii
ÖZET.....	viii
ABSTRACT.....	x
BÖLÜM 1	
GİRİŞ	1
1.1 Literatür Özeti	1
1.2 Tezin Amacı	6
1.3 Hipotez	6
BÖLÜM 2	
ADOMIAN AYRIŞTIRMA (DECOMPOSITION) METODU.....	7
2.1 Metodun Avantajları	8
2.2 Metodun Tanımı.....	9
2.3 Adomian Metodunun Yakınsaklığı	14
2.4 Adomian Polinomlarının Elde Edilmesi.....	16
2.4.1 Taylor Seri Yöntemi.....	16
2.4.2 Neumann Seri Yöntemi.....	18
2.4.3 Parametrizasyon Yöntemi	19
2.5 Modifiye Adomian Ayrıştırma Metodu.....	30
2.6 AAM ile Picard Metodunun Karşılaştırılması.....	32
BÖLÜM 3	
AAM UYGULAMALARI VE ÖRNEKLER	39
3.1 Adi Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü	39
3.1.1 Adi Diferensiyel Denklem.....	42

3.1.2	Lineer Olmayan Sarkaç Denklemi.....	43
3.1.3	Lineer Olmayan Adi Diferensiyel Denklem.....	45
3.2	Kısmi Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü	46
3.2.1	MAAM ile Kısmi Diferensiyel Denklem Çözümü.....	48
3.2.2	Homojen Olmayan Adveksiyon (Advection) Denklemi.....	49
3.2.3	Homojen Kısmi Diferensiyel Denklem.....	50
3.2.4	Çok Boyutlu Isı Denklemi.....	51
3.2.5	Çok Boyutlu Homojen Olmayan Isı Denklemi.....	52
3.2.6	Çok Boyutlu Homojen Isı Denklemi.....	54
3.2.7	Homojen Olmayan Çok Boyutlu Isı Denklemi.....	55
3.2.8	Tek Boyutlu Dalga Denklemi.....	57
3.2.9	Homojen Dalga Denklemi.....	59
3.2.10	Homojen Olmayan Dalga Denklemi.....	60
3.2.11	Çok Boyutlu Homojen Olmayan Dalga Denklemi.....	62
3.2.12	Laplace Denklemi.....	63
3.2.13	Poisson Denklemi.....	64
3.2.14	Klein-Gordon Denklemi.....	66
3.2.15	D'Alembert Dalga Denklemi.....	68
3.3	Sistemlerin AAM ile Çözümü.....	70
3.3.1	Lineer Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemleri	70
3.3.2	Lineer Olmayan Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemleri	72
3.4	Volterra İntegral Denklemlerin AAM ile Çözümü	76
3.4.1	İkinci Tür Volterra İntegral Denklemi	77
3.4.2	Homojen Olmayan Volterra İntegral Denklem	78
3.4.3	Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklem.....	80
3.4.4	Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklemin MAAM ve AAM ile Çözümü... ..	81
3.4.5	Homojen Olmayan Volterra İntegral Denklemlerin MAAM ve AAM ile Çözümü.	82
3.4.6	Volterra İntegral Denklem	83
3.4.7	Sarkaç Salınımı Problemi	85
3.5	Fredholm İntegral Denklemlerin AAM ile Çözümü	87
3.5.1	Fredholm İntegral Denklem	89
3.5.2	Homojen Olmayan Fredholm İntegral Denklemi İçin AAM ve MAAM ile Çözümü.	90
3.5.3	Dejenere Çekirdek ile AAM'nin Fredholm İntegral Denkleme Uygulaması.....	92
3.6	Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü	93
3.7	Fredholm İntegro-Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü	96

BÖLÜM 4

SONUÇ VE ÖNERİLER	100
KAYNAKLAR	101
ÖZGEÇMİŞ	106

SİMGE LİSTESİ

A_n	Adomian polinomları
L_x	x değişkenine bağlı türev operatörü
L_y	y değişkenine bağlı türev operatörü
L_x^{-1}	x değişkenine göre integral operatör
L_y^{-1}	y değişkenine göre integral operatör

KISALTMA LİSTESİ

AAM	Adomian Ayrıştırma Metodu
ADM	Adomian Decomposition Method
MAAM	Modifiye Adomian Ayrıştırma Metodu
MADM	Modified Adomian Decomposition Method

ADOMIAN AYRIŞTIRMA (DECOMPOSITION) METODU İLE MODELLEME ÖRNEKLERİ

Hacer AKYOL

Matematik Mühendisliği Anabilim Dalı

Yüksek Lisans Tezi

Tez Danışmanı: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Eş Danışman: Yrd. Doç. Dr. Ali ŞAHİN

Bu araştırmanın amacı, diğer sayısal yöntemlerin aksine Adomian Ayrıştırma Metodu (AAM) kullanılarak denklemlerin dönüşüm uygulamadan daha kolay ve doğru bir şekilde çözüldüklerini belirtmektir. Dahası, denklemlerin kapalı ve analitik çözümlerinde veya yaklaşık çözümlerinde güçlü bir metot olan AAM örneklerle anlatılmıştır. Ayrıca bu durum çok hızlı yakınsaklığa sahip olan örneklerin çözümlerinde yadsınamaz bir avantaj olarak görülmüştür.

İlk Bölümde, G. Adomian hakkında bilgi verilmiş ve metodun literatür taraması yapılmıştır. Hipotez ve amaçlar kapsamında diğer bölümlere geçilmiştir.

İkinci bölümde ilk olarak, metot analiz edilerek bir örnekle çözüm ifade edilmiştir. Daha sonra, yakınsaklığıyla ilgili teoremler verilmiş ve Adomian Polinomları Taylor Serisi Metodu, Neumann Serisi Metodu, Parametrizasyon gibi üç değişik yöntemle örnekler üzerinde hesaplanmıştır. Buna ek olarak, Modifiye ayrıştırma metodu analiz edilerek standart AAM ile karşılaştırma yapılmıştır. Son olarak, aynı örnekler Picard Metodu ile Adomian Ayrıştırma Metodu kullanılarak çözümler hakkında yorumlar yapılmıştır.

Üçüncü Bölüm birinci kısımda, adi diferensiyel denklemler için uygulamalar mevcuttur. Aynı bölümün ikinci kısımda, kısmi diferensiyel denklemler için ısı ve dalga denklemleriyle ilgili farklı örnekler verilmiştir. Üçüncü bölüm üçüncü kısımda, denklem sistemleri hakkında

bilgiler verilmiştir. Üçüncü bölüm dördüncü kısımda, integral denklemlerin AAM ile çözümü ve son kısımda ise integro-diferensiyel denklemlerle ilgili açıklamalar yapılmıştır.

Sonuç olarak, bu araştırmada metodun faydalarından yararlanarak birçok denklem türünde Adomian Ayrıştırma Metodu ile hassas sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Adomian Ayrıştırma Metodu, Modifiye Adomian Ayrıştırma Metodu, Picard Metot, Adi Diferensiyel Denklemler, Kısmi Diferensiyel Denklemler, İntegral Denklemler, İntegro-Diferensiyel Denklemler.

EXAMPLES OF MODELLING WITH ADOMIAN DECOMPOSITION METHOD

Hacer AKYOL

Department of Mathematics Engineering

MSc. Thesis

Advisor: Prof. Dr. Mustafa BAYRAM

Co-Advisor: Assist. Dr. Ali ŞAHİN

This article is a report on, unlike any other numerical methods, using Adomian Decomposition Method (ADM) is pointed out to solve more easily and accurately without transforming the equation. Moreover, the ADM which is a powerful method to investigate approximate solutions or even analytical solutions of nonlinear equations, is explained with examples. This situation is also seem that is an undeniable advantage for samples resolved with ADM which have very rapidly convergent.

In chapter one, it has given knowledge about G. Adomian and reviewed literature of method. Within hypothesis and purposes is started other sections.

In chapter two, firstly, analysis of method is expressed an example. Afterwards, the theorems are given interested in convergence and Adomian Polynomials are calculated with samples of three different methods such as Taylor Series Method, Neumann Series Method and Parametrization. In addition, Modified Decomposition Method is analyzed and is compared with standard Adomian Decomposition Method. Finally, using Picard Method and AAM have been commented about the solutions of same examples.

In the first part of section three, applications are available for ordinary differential equations. In the second part of the same section, the various examples for the partial differential equations are given interested in heat and wave equations. In the third part of the section three, the information is provided about systems of equations. In the fourth part of the section three, solving the integral equations with the Adomian Decomposition

method and in the finally part, it is made the disclosure about of integro-differential equations.

In conclusion, in this research, the utilizing from the opportunity of the method are obtained more efficiency and elegantly results in several types of equations with ADM.

Key words: Adomian Decomposition Method, Modified Adomian Decomposition Method, Picard Method, Ordinary Differential Equations, Partial Differential Equations, Integral Equations, Integro-Differential Equations.

BÖLÜM 1

GİRİŞ

1.1 Literatür Özeti

Adi ve kısmi diferensiyel denklemler, integral ve integro-diferensiyel denklemler ve tüm bunları içeren denklem sistemleri birçok temel bilim ve mühendislik dallarında doğada var olan pek çok problemin matematiksel modellemeleridir. Yapılan modellemelerle bir değişkenin diğer bir değişkene olan durumu ifade edilir. Dolayısıyla modelin elde edilmesi problem hakkında yeterli bilgi sahibi olmayı, probleme ait olan değişkeni belirlemeyi, uygun basitleştirmeler ve varsayımlar yapabilmeyi gerektirir.

Modellerin çözümünde” birçok farklı teknik kullanılır. Adomian ayrıştırma metodu (AAM) bu tekniklerden biridir. AAM ilk olarak 1980’lerin başında George Adomian tarafından tanıtılmıştır. Adi, kısmi, lineer ve lineer olmayan denklemlerin çözümü için Adomian ayrıştırma metodunu geliştiren G. Adomian (1922-1996) Amerikalı bir matematikçidir. Ayrıca “*Solving Frontier Problems in Physics*” kitabının da yazarı olan Adomian [1], bu kitabında metodunu anlatmıştır.

Adomian, bu metodu problemlerin yaklaşık, uygun çözümlerini gözlemlemek ve çözmek amacıyla uygulamıştır. Bunlar sınır ve başlangıç şartları olan ve temel bilimlerde ortaya çıkan deterministik, stokastik, lineer ve lineer olmayan problemlerdir. Lineer ve lineer olmayan problemler için Adomian’ ın yaklaşımı gerçek sonuca çok hızlı yakınsaklığı, yüksek doğruluğu, hesaplamaları en aza indirmesi ve lineerleştirmeye ihtiyaç duyulmaması, pertürbasyon teori uygulaması, gerçek dışı fiziksel kabullerden kaçınılması ile gerçek yada yaklaşık analitik çözümü gözlemlemek için önemli sonuçlar açıklar. Her terim Adomian polinomu adı verilen

polinomla genelleştirilir. Adomian, lineer olmayan denklemlerin bütün çeşitleri için bu polinomları genelleştirerek ifade etmiştir. Bu metot ile çözüm, terimleri kolayca hesaplanabilen yakınsak kuvvet serileri formunda elde edilir [2].

Birçok araştırmacı [3], AAM'nin pek çok karmaşık problem için başka yöntemleri kullanmaya gerek kalmadan çözüme çok hızlı yakınsadığını göstermiştir. Cherruault [4],[5], AAM'nin yakınsaklığını integral denklemlere uygulamıştır. Daha sonra, Cherruault ve Adomian [6], metodun yakınsaklığını yeni bir ispatla ortaya koymuştur. Buna ek olarak, Abbaoui [7], genellikle diferensiyel denklemlerin uygulamasında AAM'nin yakınsaklığını ispatlamıştır. Fakat kapalı form elde edilemeyen problemlerde seri bileşenleri kesilerek çözüme ulaşılır ki bu diğer sayısal tekniklere oranla terimlerin yüksek doğrulukta yakınsadığını gösterir [8], [9], [10].

Adomian çalışmalarında metodun birçok deterministik ve stokastik probleme uygulamasını tanıtmaktadır [11], [12], [13]. Tanıttığı bu metodu fiziki problemleri çözmek için uygulamıştır. Sonuçların umut verici ve dikkate değer olması Adomian'ın başarısıdır. N. Bellomo ve R. Monaco, ayrıştırma metodu ve pertürbasyon tekniği arasında karşılaştırma yaparak ayrıştırma metodunun pertürbasyon metoduna göre daha kullanışlı olduğunu göstermişlerdir [14]. R. Rach, ayrıştırma metodunun Picard metoduna göre daha avantajlı olduğunu vurgulamıştır [9]. Wazwaz, Adomian metodu ve Taylor serisi metodunu karşılaştırarak AAM'nin daha az hesaplama gerektirdiğini öne sürmüştür [10]. Sonlu fark metodu gibi diğer metotlarla karşılaştırması da literatürde mevcuttur.

Datta [15], [16], ayrıştırma serilerinin yüksek derecede doğru sayısal çözüm sağladığını göstermiştir. Rach [17], AAM'nin Legendre denklemleri, Bessel ve Hermit denklemleri gibi tekil katsayılarla diferensiyel denklemleri çözdüğünü göstermiştir. N. T. Shawagfeh [18], operatörün uygun bir tanımını Lane-Emden denkleminin tekil noktasını bulmadaki zorluğun üstesinden gelmede kullanmıştır. Dahası, A. M. Wazwaz'da bu konuyu desteklemiştir [19]. L. Casasus ve W. Al-Hayani [20], ayrıştırma metodunun sürekli olmayan diferensiyel denklemlere uygulandığını ortaya koymuştur [3].

Abdul Majid Wazwaz [21], "reaction-diffusion Brusselator Modeli" ve kısmi diferensiyel denklem sistemleri için ayrıştırma metodunu kullanmıştır. Çalışmasında metodun iki avantajından bahsetmektedir. Bunlardan ilki hesaplamayı azaltması, ikincisi ise var olan

teknikle karşılaştırıldığında doğru ve hızlı yakınsamasıdır. Böylece analitik ve sayısal sonuçlara daha kısa sürede ulaşılmıştır.

David J. Evans, M. Ergüt ve Hasan Bulut [22], çok boyutlu diferensiyel denklemleri nümerik ayrıştırma metodu ile çözmüşlerdir. Çalışmalarında üç boyutlu lineer Helmholtz denklemlerinden bahsetmişlerdir. Bu denklemi çözerken sonlu elemanlar metodu ile AAM'yi karşılaştırmışlardır. Buna göre, AAM'nin birçok problem için etkili ve hızlı bir yöntem olduğu sonucuna varmışlardır [23].

M. Inc ve D. J. Evans [24], iki tekil noktaya sahip sınır değer problemlerine AAM'yi uygulamışlardır. Sonuç olarak, standart tekniklerdeki gibi problemi lineer duruma getirmeden veya pertürbasyon uygulamaya gerek kalmadan AAM ile çözümü gerçekleştirmişlerdir. Metodun güvenilirliği ve yüksek mertebeden sınır değer problemlerine uygulanabilir olduğunu gösterilmişlerdir.

Doğan Kaya, Salah M.El-Sayed [25], Kadomtsev-Petviashvili denkleminde ayrıştırma metodunu uygulamıştır. Nümerik çözümleri bilinen analitik çözümlerle karşılaştırmış ve yaklaşık çözümleri dönüşüm tekniklerine gerek kalmadan bulunmuşlardır. Birkaç terimle dahi çözüme ulaşıldığını ifade etmişlerdir. Ayrıca Zhenya Yan'da Modifiye KdV denklemleriyle ilgili çalışmıştır [26].

D. Kaya, iki boyutlu KdV-Burgers denklemlerine Adomian ayrıştırma metodunu uygulamıştır [27]. Bu çalışmada başlangıç şartları verilen Korteweg-de-Vries Burgers denklemlerin sayısal ve açık çözümlerini elde etmek için yeni bir ayrıştırma metodu kullanmıştır. Sonuç olarak, çözümlerin AAM ile çok hızlı yakınsadığını ve hesaplamaların azaltılarak zamandan tasarruf sağlandığını belirtmiştir.

Abdul Majid Wazwaz [28], Bratu tipi denklemlerin sonuçlarına ulaşmak için ayrıştırma metodunu kullanmıştır. Bratu denklemlerinin termal tipi denklemler olduğu hakkında bilgi vermiş ve farklı örneklerde Adomian polinomlarını hesaplayarak grafiklerle bu çalışmalarını desteklemiştir. Problemler incelendiğinde birinci tip denklemin çözümünün tanımın ortası hariç diğer bölgelerde sınırlı olduğu, fakat ikinci Bratu tipi denklemde ise çözümün bütün bölgelerde sınırlı olduğunu ifade etmiştir.

Kamel Al-Khaled ,[29], nümerik yaklaşım elde etmek için popülasyon büyüme modellerine AAM'yi uygulamıştır. Büyüme modellerini ele alarak (Volterra integral denklem ile ifade

ettiği) Sinc-Galerkin metodu ile ayrıştırma metodunu karşılaştırmıştır. Sonuç olarak, AAM'nin daha kullanışlı ve etkili olduğunu, ayrıca daha az hesaplama gerektiğini göstermiştir.

Abdul-Majid Wazwaz [30], zamana bağlı Emden-Fowler tipi denklemlerin analitik çözümünü AAM ile bulmuştur. Çeşitli türden Emden-Fowler denklemlerini, [31] çözerek metodun lineer ve lineer olmayan denklemler için analitik çözümlerini bulmada uygun olduğunu ifade etmiştir [32]. Denklemin $x = 0$ 'da tekil noktasının var olmasından kaynaklanan zorluğa rağmen çözümün üstesinden gelmiştir.

Qi Wang [33], $(N + 1)$ boyutlu Sine-Gordon AAM denklemleri için modifiye ayrıştırma metodunu kullanmıştır. Bu metodu başlangıç şartları verilen Sine-Gordon denklemlerinin Jacobi eliptik yaklaşımını elde etmek için uygulanmıştır. Sayısal sonuçlar doğru çözüme ne kadar yakınsadığını ve birçok problemin tam çözümünü vermiştir. Değişkenlerine ayırmaya veya pertürbasyona, dahası lineerleştirmeye gerek kalmadan sonuca ulaşmıştır.

Necat Polat, Doğan Kaya ve H.İlhan Tutarlar [34], modifiye Kawahara denklemlerinin sayısal çözümleri ve metodun analiziyle ilgili araştırma yapmışlardır ve bilinen analitik çözümlerle karşılaştırmışlardır. AAM'nin yakınsaklığını modifiye Kawahara denkleminin uygulanmasında ispatlamışlardır [35]. Sonuç olarak, AAM algoritmasının lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemler için ayrıştırmaya gerek kalmadan yüksek doğrulukta sayısal çözümler sağlandığını ifade etmişlerdir [36].

Huifeng Gu, Zhi-bin Li [37], lineer olmayan diferensiyel denklem sistemlerine modifiye Adomian metodunu uygulamışlardır. Bu çalışmalarında, Babolian ve Javadi' nin Adomian hesaplamaları için "BJ metodu" olarak ifade edilen çok basit bir türev operatöründen bahsetmişlerdir. Dahası, BJ metodunun polinomları hesaplamada daha avantajlı olduğunu sayısal sonuçlarla ifade etmişlerdir [38].

Mladen Mestrovis, [39], sekizinci mertebeden sınır değer problemlerine MAAM'yi uygulamıştır. Bu çözümü yaparken altıncı mertebeden denklem çözümünden yararlanmıştır ve MAAM'nin lineer ya da lineer olmayan problemler için daha az işlem yükü gerektirdiğini [40], güvenilir sonuçlar verdiğini yaptığı hesaplamalarla göstermiştir [41].

M.T. Darvishi ve A.Barati, [42]'te lineer olmayan denklem sistemleri için kullanılan süper kübik iteratif metotları tanıtmışlardır. Burada süper kübik metotlardan biri Adomian

ayırıştırma metodu, diğeri ise Jacobian matrislerinin tersini elde etmek için kullanılan “quadrature formulate” ’ tir. Her iki metotla da yakınsaklık ifade edilmiştir.

S. Abbasbandy, Y. Tan ve S.J. Liao, [43], lineer olmayan denklemler için Newton-Homotopy analizinden bahsetmişlerdir. Burada Adomian metodu ile, homotopy analiz metodunu homotopi permütasyon metotla karşılaştırmışlardır [44]. Böylece, bu iki metodun homotopy analiz metodu ile birleşik olduğunu ifade etmişlerdir.

Mehdi Dehghan, Asgar Hamidi ve Muhammad Shakourifar [45], Adomian-Pade tekniği kullanarak çift Burger denklemlerin çözümünü elde etmeye çalışmışlardır. İki boyutlu parabolik denklemlerin çözümü için AAM ve Pade yaklaşım metodunu bir arada kullanmışlardır [46]. AAM-Pade tekniğiyle standart AAM’yi karşılaştırmışlardır. AAM-Pade metodunun AAM’ye göre daha hızlı yakınsadığını ve doğruluk derecesinin daha fazla olduğunu sayısal sonuçlarla göstermişlerdir [47].

Muhammed Ali Hajji ve Kamel Al-Khaled [48], dördüncü mertebeden lineer olmayan sınır değer problemleri üzerinde bazı nümerik metotlarla çalışmışlardır. Bu metotlar Sinc-Galerkin metot (SGM), Laplace dönüşüm metodu ve AAM’dır [49]. Problemlere bu üç metot uygulanmış ve Sinc-Galerkin metodunun [50] daha güvenilir ve doğru olduğunu grafikler ve hesaplamalarıyla belirtmişlerdir.

O. P. Layeni [51], Modifiye Adomian Ayırıştırma Metodunu Chebyshev polinomlarıyla ifade etmiştir. Aynı zamanda metodun güvenilirliği hakkında bilgi vermiştir [52]. İncelediği problemleri grafiklerle ifade ederek Modifiye metodunun doğru sonuçlar verdiğini açıklamıştır.

Alice Gorguis ve Wai Kit Benny Chan [53], ısı denklemleri üzerinde çalışmışlardır. Değişkenlerine ayırıştırma metodu ve AAM ile problemleri çözerek AAM’nin etkili ve güvenilir sonuçlar ürettiğini yaptıkları hassas hesaplamalarla ifade etmişlerdir.

Tüm bu araştırmalar ışığında ayırıştırma metodunun başlıca özellikleri aşağıdaki şekilde verilebilir; denklem operatör formda ifade edilir. Daha sonra, denklemin her iki tarafına ters operatör (integral operatörü) uygulanarak operatör formda yazılabilir. $u(x, y)$ bilinmeyen fonksiyon ayırıştırma serisi ile,

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$$

olarak yazılır ve bileşenler belirlenerek bu form denklemde yerine konur. $f(x, y)$ teriminin integralinden sıfıncı bileşen olan $u_0(x, y)$ sıfır bileşeni tanımlanır ve verilen şartlardan bu terim ortaya çıkar. Böylece, özyineleme (recursive) ilişkisi tanımlanarak $k \geq 1$ iken u_k seri çözümlerinin bileşenleri belirlenir. Burada u_k' nın her bileşeni önceki u_{k-1} bileşeni kullanılarak çözüm tamamlanır. Birçok denklemde kapalı formda çözüm varsa tam çözüm kolayca elde edilir. Adomian ayrıştırma metodu homojen veya homojen olmayan, lineer veya lineer olmayan denklemlerde çözüme tanımlayıcıya ihtiyaç olmadan doğrudan yaklaşır. Bu metotta diğer tekniklere nazaran, homojen olmayan şartları homojen şartlara dönüştürmeye gerek olmamasıdır.

1.2 Tezin Amacı

Bu araştırmanın amacı, Adomian Ayrıştırma Metodunun hangi süreçlerden geçtiği, çözümü için hangi işlem basamakları uygulanması gerektiği, lineer ve lineer olmayan adi, kısmi diferensiyel denklemler, diferensiyel denklem sistemleri, integral ve integro-diferensiyel denklemler gibi modelleme yapılırken karşılaşılan çeşitli türdeki denklemler hakkında bilgi vermektir.

1.3 Hipotez

1980'li yılların başında bulunan Adomian Ayrıştırma Metodunun günümüze kadar olan gelişim sürecini ve uygulama alanlarını anlatmak, buna ek olarak, metodun diğer nümerik yöntemlere üstünlüğü olup olmadığını araştırmaktır.

BÖLÜM 2

ADOMIAN AYRIŞTIRMA (DECOMPOSITION) METODU

1980'lerin başında çeşitli türde lineer olmayan denklemleri çözmek için Adomian tarafından yeni bir metot geliştirilmiştir. Bu metoda; Adomian ayrıştırma (Decomposition) metodu (AAM) adı verilmiştir. Adomian bu metodu; fizik, kimya, biyoloji ve mühendislikte ortaya çıkan, sınır ve başlangıç şartları olan deterministik, stokastik, lineer ve lineer olmayan problemlere yaklaşık ve uygun çözümleri gözlemlemek amacıyla uygulamıştır [54].

Adomian ayrıştırma metodu deterministik, stokastik, lineer ve lineer olmayan kısmi diferensiyel denklemlerin yanı sıra adi diferensiyel denklemlerin de çözümünde önemli rol oynar. Lineer olmayan denklemlerin çözümlerini gözlemlemek için literatürde birkaç metot tanımlanmıştır. Bu metotlardan bazıları değişkenlerine ayrıştırma metodu, tanh metot, sine–cosine metot, Painleve metot, Darboux dönüşümü, ters saçılma dönüşümleridir. AAM; lineer ve lineer olmayan problemler için, gerçek sonuca çok hızlı yakınsaklığı, güvenilirliği, perturbasyon teori uygulaması, gerçekdışı fiziksel kabullerden kaçınması ile gerçek veya yaklaşık analitik çözümü gözlemlemede önemli sonuçları açıklamıştır. Adomian'ın uyguladığı bu teknik, lineer olmayan denklemlerin ayrıştırılmasındaki gibi seri fonksiyonlar şeklinde kullanılmıştır. Her terim Adomian polinomu adı verilen polinomlarla genelleştirilmiştir [1], [12].

2.1 Metodun Avantajları

Lineer ve lineer olmayan problemler için AAM'nin avantajları birçok araştırmacı tarafından vurgulanmıştır. Sayısal metotlar; sadece zaman ve uzaklık değişkenlerinin bazı değerleri için yaklaşık çözümleri hesaplama tabanına dayanan tekniklerdendir. AAM; değişkenlerine ayırıştırmayı, doğrusallaştırmayı ve perturbasyonu gerekli kılan bir metot değildir. Birkaç araştırmacı AAM' yi diğer metotlarla karşılaştırmıştır. Bellomo ve Monaco, Adomian metodunu peturbasyon teknikleriyle karşılaştıran araştırmacılardandır. Ayırıştırma metodu Picard iterasyon metoduyla karşılaştırıldığında; Picard metodunun AAM'ye göre çok fazla hesaplama gerektiren bir yöntem olduğunu göstermiştir. İntegro–diferensiyel denklemlerin çözümünün Wavelet-Galerkin Metot (WGM) ile karşılaştırıldığında Adomian ayırıştırma metodunun verimli, kolay kullanılabilir olduğu, dahası o hesaplama sürecini azaltan ve açık formda gözlemlenen güvenilir sonuçlara sahip olduğu gözlemlenmiştir. Wazwaz; Taylor serileri metodunu AAM ile karşılaştırmıştır. Bu karşılaştırmada; ayırıştırma metodunun verimli olduğunu, birkaç yinelemeyle güvenilir sonuçlar ürettiğini, zorlukları en aza indirerek kolayca kullanılmasını ve lineer olmayan problemlerin lineer problemler gibi basit usulde ele alındığı gözlemlenmiştir. Böylece metodun lineerleştirme ve perturbasyon yetersizliklerinin üstesinden geldiğini öne sürmüştür. Shawagfeh ve Kaya da, adi diferensiyel denklemlerin çözüm sistemi için Adomian Ayırıştırma Metodu ve dördüncü mertebeden Runge-Kutta metodu arasında sayısal bir karşılaştırma sunmuşlardır. Bu karşılaştırmaların sonucunda; Adomian tekniğinin çok güçlü, tamamen doğru, uygulama kolaylığı olan ve sayısal çözümlerin yanı sıra analitik çözümlerin bulunmasında da etkili olduğunu ifade etmişleridir. Vadasız ve Olek; Adomian metodunun Runge-Kutta metodundan daha kesin olduğunun sonucuna varan aynı denklemi daha kapsamlı çalışmışlardır [2].

2.2 Metodun Tanımı

Adomian ayrıştırma metodu, lineer olmayan $Fu = g$ diferensiyel denklemi için uygulanan yöntem olarak ifade edilir. Burada F ; lineer olmayan diferensiyel operatörü temsil eder. Bu teknik F 'nin $L + R$ 'de lineer kısmının ayrıştırılmasıyla oluşur. L kolayca tersi alınabilen bir operatör ve R ise kalan kısımdır. Lineer olmayan kısım ise N ile temsil edilerek denklem uygun formda yazılırsa,

$$Lu + Ru + Nu = g \quad (2.1)$$

elde edilir. L operatörünün tersi L^{-1} olarak tanımlanır ve denkleme L^{-1} işlemi uygulanırsa

$$L^{-1}Lu = L^{-1}g - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.2)$$

şeklinde yazılır. (2.2) denklemindeki L operatörü n . mertebeden türev operatörüdür, L^{-1} ise n – katlı integrali ifade eder. (2.2)' nin sol tarafı integral sabitiyle birlikte

$$L^{-1}Lu = u + a \quad (2.3)$$

olarak yazılabilir. Denklem $u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ seri çözümü ile ifade edilir ve u_0 ; $L^{-1}g - a$ şeklinde tanımlanır. Böylece (2.2)'deki eşitlik sağlanarak,

$$u = u_0 - L^{-1}Ru - L^{-1}Nu \quad (2.4)$$

elde edilir. u_n , $n > 0$ terimi yerine konularak özyinelemeli (recursive) ilişkisi belirlenebilir. Metodun çözümü, denklemde lineer olmayan Nu terimlerinin ayrıştırılmasıyla oluşturulur. $Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$ şeklinde tanımlanır. Burada A_n , Adomian polinomlarıdır. Her A_n polinomu $n > 0$ için $u_0, u_1, u_2, \dots, u_n$ bağımsız değişkenlerine bağlıdır. Adomian, lineer olmayan bütün denklemler için bu polinomları elde etmek amacıyla formül geliştirmiştir [12], [55], [56]. Adomian polinomlarının toplamı bir u_0 fonksiyonunun komşuluğunda Taylor serileriyle genelleştirilmiştir. Bu bağlamda,

$$Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (u - u_0)^n N^{(n)}(u_0) \quad (2.5)$$

olduğu görülür. Sıfır için serilerin genel terimine bakılırsa, ilk terim L' nin n . merteye ve m terimleri için uygun seçiminden dolayı $\frac{1}{(mn)!}$ şeklinde yazılır [56], [57]. Böylece,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n, \quad Nu = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.6)$$

(2.6) ayrıştırma serisi formu (2.4) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = u_0 - L^{-1} R \sum_{n=0}^{\infty} u_n - L^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} A_n \quad (2.7)$$

elde edilir. Burada $u_n(x, t)$, $n = 0, 1, 2, \dots$ bileşenlerini tanımlamak için aşağıdaki özyineleme (recursive) ilişkisi kullanılır;

$$u_1 = -L^{-1} R u_0 - L^{-1} A_0$$

$$u_2 = -L^{-1} R u_1 - L^{-1} A_1$$

$$\vdots$$

$$u_{n+1} = -L^{-1} R u_n - L^{-1} A_n$$

$$\vdots \quad (2.8)$$

Genelleştirilen Adomian polinomları ise,

$$A_n(u_0, u_1, u_2, \dots, u_n) = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \quad (2.9)$$

şeklinde ifade edilir [7], [12], [55], [58]. Bu formül, uygun λ parametresi için sunularak,

$$u(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n u_n \quad (2.10)$$

$$N(u(\lambda)) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n \quad (2.11)$$

(2.12) şeklinde elde edilir. (2.5) denklemi, $\lambda = 0$ komşuluğunda Taylor serilerine genişletilerek,

$$\begin{aligned} N(v(\lambda)) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N(u(\lambda)) \right]_{\lambda=0} \lambda^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} N \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i u_i \right) \right]_{\lambda=0} \lambda^n \end{aligned} \quad (2.13)$$

yazılabilir. Böylece, ayrıştırma serileri (2.12) ile kolayca bulunabilir [7], [59], [60], [61].

Örnek 2.1

$$u_y + u_x = 2xy^2 + 2x^2y, \quad u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0 \quad (2.14)$$

denkleminin çözümünü Adomian ayrıştırma metodu ile x ve y 'ye göre analiz ediniz [62].

Çözüm:

$L_x = \frac{\partial}{\partial x}$ ve $L_y = \frac{\partial}{\partial y}$ operatörleri tanımlansın. Bu operatörlerin tersi,

$$L_x^{-1} = \int_0^x (\cdot) dx, \quad L_y^{-1} = \int_0^y (\cdot) dy \quad (2.15)$$

olur. (2.13) denkleminde L_x ve L_y operatörleri uygulanarak,

$$L_x u = 2xy^2 + 2x^2y - L_y u \quad (2.16)$$

ifadesine ulaşılır. Bu denklem x ve y olmak üzere iki şekilde çözümlenebilir;

- **x-çözümü;**

(2.15) denkleminde (2.14) uygulanır ve

$$L_x^{-1} L_x u = L_x^{-1} (2xy^2 + 2x^2y) - L_x^{-1} (L_y u)$$

0'dan x 'e integrali alınan denklem,

$$u(x, y) = x^2 y^2 + \frac{2x^3 y}{3} - L_x^{-1} (L_y u) \quad (2.17)$$

olur.

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$$

seri çözümü (2.16)' da yerine konulduğunda,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y - L_x^{-1} \left(L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) \right)$$

olduğu görülür ve seri ayrıştırılarak,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y - L_x^{-1} (L_y (u_0 + u_1 + u_2 + \dots))$$

şeklinde elde edilir. Bu bağlamda özyineleme (recursive) algoritması,

$$u_0(x, y) = x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y$$

$$u_{k+1}(x, y) = L_x^{-1} (L_y (u_k)), \quad k \geq 0 \quad (2.18)$$

olarak elde edilir. (2.17)' deki algoritma ışığında,

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -L_x^{-1} (L_y (u_0)) = -L_x^{-1} \left(L_y \left(x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y \right) \right) \\ &= -L_x^{-1} \left(2x^2 y + \frac{2}{3} x^3 \right) = -\int_0^x \left(2x^2 y + \frac{2}{3} x^3 \right) dx \\ &= -\left(\frac{2}{3} x^3 y + \frac{1}{6} x^4 \right) \end{aligned}$$

$$u_1 = -\frac{2}{3} x^3 y - \frac{1}{6} x^4$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= -L_x^{-1} (L_y (u_1)) = -L_x^{-1} \left(L_y \left(-\frac{2}{3} x^3 y - \frac{1}{6} x^4 \right) \right) \\ &= -L_x^{-1} \left(-\frac{2}{3} x^3 \right) = -\int_0^x \left(-\frac{2}{3} x^3 \right) dx \end{aligned}$$

$$= -\left(-\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} x^4\right) = \frac{1}{6} x^4$$

terimleri hesaplanır ve çözüme

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y - \frac{2}{3} x^3 y - \frac{1}{6} x^4 + \frac{1}{6} x^4 \dots = x^2 y^2$$

olarak açık ve kapalı şekilde ulaşılır.

• **y-çözümü;**

(2.13) denkleminde ve y' ye bağlı türev operatöründen,

$$L_y u = 2xy^2 + 2x^2 y - L_x u \quad (2.19)$$

elde edilir ve (2.14)' teki y' ye bağlı integral operatöründen,

$$L_y^{-1} L_y u = L_y^{-1} (2xy^2 + 2x^2 y) - L_y^{-1} (L_x u)$$

yazılır. 0'dan y' ye integrali alınan denklem,

$$u(x, 1) = \int_0^y (2xy^2 + 2x^2 y) dy - L_y^{-1} (L_x u)$$

$$u(x, 1) = \frac{2}{3} xy^3 + x^2 y^2 - L_y^{-1} (L_x u) \quad (2.20)$$

olur.

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \quad (2.21)$$

(2.20)' deki seri çözümü (2.19)'a uygulanırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = \frac{2}{3} xy^3 + x^2 y^2 - L_y^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) \right) \quad (2.22)$$

elde edilir. Buradan,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = x^2 y^2 + \frac{2}{3} xy^3 - L_y^{-1} (L_x (u_0 + u_1 + u_2 + \dots))$$

olur ve bileşenler,

$$u_0(x, y) = \frac{2}{3}xy^3 + x^2y^2$$

$$u_{k+1}(x, y) = L_y^{-1}(L_x(u_k)), \quad k \geq 0 \quad (2.23)$$

şeklinde yazılır. (2.22) özyineleme (recursive) ilişkisiyle terimler,

$$\begin{aligned} u_1(x, y) &= -L_y^{-1}(L_x(u_0)) \\ &= -L_y^{-1}\left(L_x\left(\frac{2}{3}xy^3 + x^2y^2\right)\right) = -L_y^{-1}\left(\frac{2}{3}y^3 + 2xy^2\right) \\ &= -\int_0^y \left(\frac{2}{3}y^3 + 2xy^2\right) dy = -\left(\frac{1}{6}y^4 + \frac{2}{3}xy^3\right) \end{aligned}$$

$$u_1(x, y) = -\frac{1}{6}y^4 - \frac{2}{3}xy^3$$

$$\begin{aligned} u_2(x, y) &= -L_y^{-1}(L_x u_1) = -L_y^{-1}\left(L_x\left(-\frac{1}{6}y^4 - \frac{2}{3}xy^3\right)\right) \\ &= -L_y^{-1}\left(-\frac{2}{3}y^3\right) = -\int_0^y \left(-\frac{2}{3}y^3\right) dy = \frac{1}{6}y^4 \end{aligned}$$

şeklinde hesaplanır. Bu terimler,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = \frac{2}{3}xy^3 + x^2y^2 - \frac{1}{6}y^4 - \frac{2}{3}xy^3 + \frac{1}{6}y^4 + \dots = x^2y^2$$

olarak açık ve kapalı şekilde yazılabilir.

2.3 Adomian Metodunun Yakınsaklığı

Adomian Metodunun yakınsaklığı birçok bilim adamının dikkatini çekmiş ve araştırma konusu olmuştur. Adomian, Cherruault' dan sonra N , H' dan H' a Hilbert uzayında lineer olmayan bir operatör ve f H' da verilen bir fonksiyon olmak üzere

$u = f + N(u)$ fonksiyonel denkleme uygulamıştır. Eşitlik

$(S_n)_n = (u_1 + u_2 + u_3 + \dots + u_n)_n$ dizisini tanımlamak için tekrar eden

$S_{n+1} = N(u_0 + S_n)$, $S_0 = 0$ düzenini kullanmıştır. Bu düzenleme Adomian tekniğiyle

çözülmeye elverişli $S = N(u_0 + S)$ fonksiyonel denklemi ile ilişkilendirilebilir.

Abbaoui ve Cherrault, Adomian metodunu kullanarak Adomian polinomlarını hesaplamak için yeni bir formül ile $u = f + N(u)$ fonksiyonel denklemi için Adomian ayrıştırma tekniğinin uygulamasının ispatını yapmışlardır. Abbaoui ve Cherrault şu sonuçlara ulaşmışlardır:

Teorem: Eğer $N \in C^\infty$, u_0 'ın komşuluğunda ise ve $\forall n \in N$ için $\|N^{(n)}(u_0)\| \leq M'$ ise

(N 'in türevi u_0 'ın komşuluğunda normda sınırlandırılır) ve eğer H Hilbert uzayında

$\|\cdot\|$ norm iken $\|u_i\| \leq M$, $i = 1, 2, \dots$ ise, $\sum_{n=0}^{\infty} A_n$ mutlak yakınsaktır ve dahası,

$$\|A_n\| \leq M' M^n \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}n\right) \text{ eşitsizliği yazılabilir [54].}$$

Teorem: Eğer $N \in C^\infty$, u_0 'ın komşuluğunda ve $\forall n \in N$ için, $\|N^{(n)}(u_0)\| \leq M < 1$ ise,

$\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ ayrıştırma serileri mutlak yakınsaktır ve ayrıca,

$$\|u_{n+1}\| = \|A_n\| \leq M^{n+1} n^{\sqrt{n}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}}n\right) \text{ olur [54].}$$

Benzer sonuçlar Cherruault ve Mavoungou tarafından tekrar ele alınmıştır.

$H = L^2((\alpha, \beta)x[0, T])$ ile tanımlanan Hilbert H uzayı düşünölsün.

$$u : (\alpha, \beta)x[0, T] \rightarrow IR$$

$$\int_{(\alpha, \beta)x[0, T]} u^2 ds d\tau < \infty \quad (2.24)$$

ve skaler çarpan,

$$(u, v)_H = \int_{(\alpha, \beta)x[0, T]} uv ds d\tau < \infty$$

olarak tanımlanır. (2.23) eşitliğı normla birleştirilirse,

$$\|u\|_H^2 = \int_{(\alpha, \beta)x[0, T]} u^2 ds d\tau < \infty$$

şeklinde ifade edilir.

$$Lu + Ru + Nu = g$$

ayırıştırma denklemi,

$$Tu = Ru + Nu$$

ile birlikte alınarak aşağıdaki hipotezlerden bahsedilebilir:

(H_1) $(T(u) - T(v), u - v) \geq k \|u - v\|$ eşitsizliği her $u, v \in H$ iken sabit bir $k > 0$ ile sağlanır.

(H_2) Herhangi $M > 0$ için, $C(M) > 0$ sabiti vardır öyle ki her $u, v \in H$ için $\|u\| \leq M, \|v\| \leq M$, ile her $w \in H$ için

$$(T(u) - T(v), w) \leq C(M) \|u - v\| \|w\|$$

olarak yazılabilir [54].

Eğer yukarıdaki hipotezler sağlanırsa, Adomian metodu yakınsaktır [63], [64]. Bu teoremin ispatı [59], [65]'te mevcuttur. Yakınsaklığın diğer sonuçları literatürde tanımlanmıştır. Adomian metodunun yakınsaklığını elde etmek için uygun koşullar sunulmuştur [66], [67]. R. Z. Ouedraogo, Y. Cherruault ve K. Abbaoui çalışmalarında [68], cebirsel denklemleri Adomian metodunun yakınsaklığını ifade etmek için uygun koşullarla önermişlerdir. N. Ngarhasta, B. Some, K. Abbaoui ve Y. Cherruault, Adomian metodunun yakınsaklığını lineer ve lineer olmayan difüzyon denklemleri için ispatlanmışlardır [69].

2.4 Adomian Polinomlarının Elde Edilmesi

Adomian polinomlarının algoritması; lineer olmayan operatörlere, üstel fonksiyonlara, trigonometrik fonksiyonlara, logaritmik fonksiyonlara ve bileşke fonksiyonlara uygulanarak hesaplamaların daha kolay elde edilmesini sağlar. Bu polinomları elde etmek için; Taylor seri açılımı, Neumann seri yardımı ve Parametrizasyon yöntemleri kullanılabilir [70], [71].

2.4.1 Taylor Seri Yöntemi

Adomian ayırıştırma metodunun genel algoritması Taylor Serisi yardımıyla oluşturulmuştur. Lineer olmayan $f(y)$ terimi y_0 'da Taylor serisine açılırsa,

$$f(y) = f(y_0) + f'(y_0)(y - y_0) + \frac{1}{2!} f''(y_0)(y - y_0)^2 + \frac{1}{3!} f'''(y_0)(y - y_0)^3 + \dots \quad (2.25)$$

serisi elde edilir. Burada,

$$y = y_0 + y_1 + y_2 + y_3 + \dots \quad \text{ve} \quad y - y_0 = y_1 + y_2 + y_3 + \dots$$

eşitlikleri (2.24) denkleminde yerine yazılırsa $f(y)$

$$\begin{aligned} f(y) = & f(y_0) + f'(y_0)(y_1 + y_2 + y_3 + \dots) + \frac{1}{2!} f''(y_0)(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 \\ & + \frac{1}{3!} f'''(y_0)(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^3 + \dots \end{aligned}$$

olarak bulunur. Dahası, ikinci ve üçüncü kuvvetler

$$(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^2 = y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 + 2y_1y_3 + y_3^2 + 2y_2y_3 + 2y_1y_4 + \dots$$

$$(y_1 + y_2 + y_3 + \dots)^3 = y_1^3 + 3y_1^2y_2 + 3y_1y_2^2 + y_2^3 + 6y_1y_2y_3 + 3y_1y_3^2 + \dots$$

şeklinde alınarak $f(y)$ denkleminde yerine yazılır ve gerekli işlemler tamamlanırsa

$$\begin{aligned} f(y) = & f(y_0) + f'(y_0)y_1 + f'(y_0)y_2 + f'(y_0)y_3 + \frac{1}{2!} f''(y_0)y_1^2 + \frac{1}{2!} f''(y_0)y_2^2 \\ & + \frac{1}{3!} f'''(y_0)y_1^3 + \frac{1}{3!} f'''(y_0)y_2^3 + \frac{1}{3!} f'''(y_0)3y_1^2y_3 + \dots \end{aligned}$$

denklemini elde edilir. Bu denklemde, A_0 polinomu indis toplamı 0 olan terimlerden, A_1 polinomu indis toplamı 1 olan terimlerden, A_2 polinomu ise indis toplamı 2 olan terimlerden oluşur. Buna ek olarak A_n polinomu da indis toplamı n olan terimler ile ifade edilir. Bu algoritma gruplandırılırsa,

$$A_0 = f(y_0),$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0),$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f''(y_0),$$

$$A_3 = y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f'''(y_0),$$

$$A_4 = y_4 f'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) f''(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \right) f'''(y_0) + \left(\frac{1}{4!} y_1^4 \right) f^{(4)}(y_0),$$

$$\vdots$$

şeklinde Adomian polinomları ifade edilebilir.

$\lambda \in IR$ parametre olmak üzere $y = \sum_{n=0}^{\infty} y_n$ çözüm serisi $y = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n y_n$ ve lineer olmayan

$f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n A_n$ terimi parametrik olarak yazılabilir. $\lambda \in IR$ noktasında $f(x)$

fonksiyonu analitik olmak şartıyla Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_i \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

formülünden elde edilebilir. Bununla birlikte, $f(y_1, y_2, y_3, \dots, y_n)$ şeklindeki lineer olmayan Adomian polinomları

$$A_n = \frac{1}{n!} \left[\frac{d^n}{d\lambda^n} f \left(\sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_{1i}, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_{2i}, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_{3i}, \dots, \sum_{i=0}^{\infty} \lambda^i y_{ni} \right) \right]_{\lambda=0}, \quad n \geq 0$$

eşitliğinden kolayca hesaplanabilir.

2.4.2 Neumann Seri Yöntemi

Bu yöntem lineer denklemlerin yanı sıra lineer olmayan denklemler için de kullanılır. Neumann seri yöntemi aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

λ bir parametre ve

$$Y_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \lambda^i = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n$$

şeklinde olsun.

f fonksiyonunda Y_λ eşitliği yerine yazılarak λ parametresinin katsayıları cinsinden Adomian polinomları belirlenebilir. Bu fonksiyon açılımında A_0 sabit terim, A_1 λ parametresinin katsayıları ve A_n λ^n parametresinin katsayısıdır.

2.4.3 Parametrizasyon Yöntemi

Adomian polinomları Taylor ve Neumann serilerinin yanı sıra parametrizasyon yöntemiyle de elde edilebilir. Bu yöntemde öncelikle $y(\lambda) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda^k$ ve

$f(y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ tanımlanır. Bu iki eşitlikten, $\sum_{k=0}^n y_k \lambda^k = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ olduğu kabul

edilerek

$$\left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} \left(\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k \right) \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^n}{\partial \lambda^n} f(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n) \right|_{\lambda=0}$$

denklemden polinomlar elde edilebilir.

Örnek 2.2

$f(y) = y^3$ fonksiyonu için A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

- **Taylor serisi yardımıyla**

$$A_0 = f(y_0) = y_0^3,$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = 3y_0^2 y_1,$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f''(y_0) = 3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2,$$

$$A_3 = y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f'''(y_0) = 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3,$$

$$A_4 = y_4 f'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) f''(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \right) f'''(y_0) + \left(\frac{1}{4!} y_1^4 \right) f^{(4)}(y_0)$$

$$= 3y_0^2 y_4 + 3y_1^2 y_2 + 3y_2^2 y_0 + 6y_0 y_1 y_3$$

- **Neumann serisi yardımıyla**

İlk olarak

$$Y_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \lambda^i = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n$$

tanımlanır ve fonksiyonda yerine yazılırsa

$$f(y_\lambda) = (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n)^3$$

$$f(y_\lambda) = y_0^3 + \lambda(3y_0^2 y_1) + \lambda^2(3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2) + \lambda^3(3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3) \\ + \lambda^4(3y_0^2 y_4 + 3y_1^2 y_2 + 3y_2^2 y_0 + 6y_0 y_1 y_3) + \dots$$

elde edilir. Bütün polinomlar

$$A_0 = y_0^3,$$

$$A_1 = 3y_0^2 y_1,$$

$$A_2 = 3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2,$$

$$A_3 = 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3,$$

$$A_4 = 3y_0^2 y_4 + 3y_1^2 y_2 + 3y_2^2 y_0 + 6y_0 y_1 y_3$$

şeklinde ayrıştırılabilir.

- **Parametrizasyon yöntemiyle**

ilk olarak $y(\lambda) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda^k$ ve $f(y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ fonksiyonları

$$y(\lambda) = \left(\sum_{k=0}^n y_k \lambda^k \right)^3 = (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n)^3$$

$\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \dots + \lambda^n A_n)$ şeklinde tanımlanır. Buradan,

$n = 0$ için,

$$A_0 = y_0^3,$$

$n = 1$ için,

$$\left. \frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial (y_0 + \lambda y_1)^3}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow A_1 = 3y_0^2 y_1,$$

$n = 2$ için,

$$\left. \frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^2 (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)^3}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_2 = 3y_0^2 y_2 + 3y_0 y_1^2 ,$$

$n = 3$ için,

$$\left. \frac{\partial^3 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^3 (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3)^3}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_3 = 3y_0^2 y_3 + 6y_0 y_1 y_2 + y_1^3 ,$$

$n = 4$ için,

$$\left. \frac{\partial^4 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \lambda^4 A_4)}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^4 (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4)^3}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_4 = 3y_0^2 y_4 + 3y_1^2 y_2 + 3y_2^2 y_0 + 6y_0 y_1 y_3$$

Örnek 2.3

$f(y) = e^{-y}$ fonksiyonu için A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

- Taylor serisi yardımıyla

$$A_0 = f(y_0) = e^{-y_0} ,$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = -y_1 e^{-y_0} ,$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f''(y_0) = \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0} ,$$

$$A_3 = y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f'''(y_0) = \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0} ,$$

$$A_4 = y_4 f'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) f''(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \right) f'''(y_0) + \left(\frac{1}{4!} y_1^4 \right) f^{(4)}(y_0)$$

$$= \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0}$$

- **Neumann serisi yardımıyla**

$$Y_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \lambda^i = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n$$

tanımlanır ve fonksiyonda yerine yazılırsa

$$f(y_\lambda) = e^{(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n)}$$

$$\begin{aligned} f(y_\lambda) &= e^{-y_0} + \lambda \left(-y_1 e^{-y_0} \right) + \lambda^2 \left(\left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0} \right) + \lambda^3 \left(\left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0} \right) \\ &\quad + \lambda^4 \left(\left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0} \right) + \dots \end{aligned}$$

elde edilir. Bütün polinomlar

$$A_0 = e^{-y_0},$$

$$A_1 = -y_1 e^{-y_0},$$

$$A_2 = \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0},$$

$$A_3 = \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0},$$

$$A_4 = \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0}$$

şeklinde ayrıştırılabilir.

- **Parametrizasyon yöntemiyle**

İlk olarak $y(\lambda) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda^k$ ve $f(y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ fonksiyonları

$$y(\lambda) = e^{\left(-\sum_{k=0}^n y_k \lambda^k \right)} = e^{-(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n)}$$

$\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \dots + \lambda^n A_n)$ şeklinde tanımlanır. Buradan,

$n = 0$ için,

$$A_0 = e^{-y_0} ,$$

$n = 1$ için,

$$\left. \frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial e^{-(y_0 + \lambda y_1)}}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow A_1 = -y_1 e^{-y_0} ,$$

$n = 2$ için,

$$\left. \frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^2 e^{-(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)}}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_2 = \left(-y_2 + \frac{1}{2!} y_1^2 \right) e^{-y_0} ,$$

$n = 3$ için,

$$\left. \frac{\partial^3 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^3 e^{-(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3)}}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_3 = \left(-y_3 + y_1 y_2 - \frac{1}{3!} y_1^3 \right) e^{-y_0} ,$$

$n = 4$ için,

$$\left. \frac{\partial^4 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \lambda^4 A_4)}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^4 e^{-(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4)}}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_4 = \left(-y_4 + y_1 y_3 + \frac{1}{2!} y_2^2 - \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 + \frac{1}{4!} y_1^4 \right) e^{-y_0}$$

Örnek 2.4

$f(y) = y \cosh y$ fonksiyonu için A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

- **Taylor serisi yardımıyla**

$$A_0 = f(y_0) = y_0 \cosh y_0 ,$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = y_0 y_1 \sinh y_0 + y_1 \cosh y_0 ,$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f''(y_0) = y_0 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_0 y_1^2 \cosh y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \sinh y_0 + y_2 \cosh y_0 ,$$

$$A_3 = y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f'''(y_0)$$

$$= y_0 y_3 \sinh y_0 + y_0 y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{6} y_0 y_1^3 \sinh y_0$$

$$+ 2 y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_1^3 \cosh y_0 + y_3 \cosh y_0 ,$$

$$A_4 = y_4 f'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) f''(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \right) f'''(y_0) + \left(\frac{1}{4!} y_1^4 \right) f^{(4)}(y_0)$$

$$= y_4 y_0 \sinh y_0 + y_4 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_2^2 y_0 \cosh y_0 + y_2^2 \sinh y_0 + y_1 y_3 y_0 \cosh y_0$$

$$+ 2 y_1 y_3 \sinh y_0 + \frac{3}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 y_0 \sinh y_0 + \frac{1}{6} y_1^4 \sinh y_0 + \frac{1}{24} y_1^4 y_0 \cosh y_0$$

- **Neumann serisi yardımıyla**

$$Y_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \lambda^i = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n$$

$$f(y_\lambda) = (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n) \cosh(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n)$$

$$f(y_\lambda) = y_0 \cosh y_0 + \lambda (y_0 y_1 \sinh y_0 + y_1 \cosh y_0)$$

$$+ \lambda^2 \left(y_0 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_0 y_1^2 \cosh y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \sinh y_0 + y_2 \cosh y_0 \right)$$

$$\begin{aligned}
& +\lambda^3 \left(y_0 y_3 \sinh y_0 + y_0 y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{6} y_0 y_1^3 \sinh y_0 \right) \\
& +\lambda^3 \left(+2 y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_1^3 \cosh y_0 + y_3 \cosh y_0 \right) \\
& +\lambda^4 \left(y_4 y_0 \sinh y_0 + y_4 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_2^2 y_0 \cosh y_0 \right) \\
& +\lambda^4 \left(y_2^2 \sinh y_0 + y_1 y_3 y_0 \cosh y_0 + 2 y_1 y_3 \sinh y_0 \right) \\
& +\lambda^4 \left(\frac{3}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 y_0 \sinh y_0 + \frac{1}{6} y_1^4 \sinh y_0 + \frac{1}{24} y_1^4 y_0 \cosh y_0 \right)
\end{aligned}$$

elde edilir. Bütün polinomlar

$$A_0 = y_0 \cosh y_0,$$

$$A_1 = y_0 y_1 \sinh y_0 + y_1 \cosh y_0,$$

$$A_2 = y_0 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_0 y_1^2 \cosh y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \sinh y_0 + y_2 \cosh y_0,$$

$$A_3 = y_0 y_3 \sinh y_0 + y_0 y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{6} y_0 y_1^3 \sinh y_0$$

$$+ 2 y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_1^3 \cosh y_0 + y_3 \cosh y_0,$$

$$A_4 = y_4 y_0 \sinh y_0 + y_4 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_2^2 y_0 \cosh y_0 + y_2^2 \sinh y_0 + y_1 y_3 y_0 \cosh y_0$$

$$+ 2 y_1 y_3 \sinh y_0 + \frac{3}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 y_0 \sinh y_0 + \frac{1}{6} y_1^4 \sinh y_0 + \frac{1}{24} y_1^4 y_0 \cosh y_0$$

- **Parametrizasyon yöntemiyle**

ilk olarak $y(\lambda) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda^k$ ve $f(y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ fonksiyonları

$$\begin{aligned}
y(\lambda) &= \left(\sum_{k=0}^n y_k \lambda^k \right) \cosh \left(\sum_{k=0}^n y_k \lambda^k \right) \\
&= \left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n \right) \cosh \left(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n \right)
\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \cdots + \lambda^n A_n)$$

şeklinde tanımlanır. Buradan,

$n = 0$ için,

$$A_0 = y_0 \cosh y_0 ,$$

$n = 1$ için,

$$\left. \frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial (y_0 + \lambda y_1) \cosh (y_0 + \lambda y_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow ,$$

$$A_1 = y_0 y_1 \sinh y_0 + y_1 \cosh y_0 ,$$

$n = 2$ için,

$$\left. \frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^2 (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2) \cosh (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_2 = y_0 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_0 y_1^2 \cosh y_0 + \frac{1}{2} y_1^2 \sinh y_0 + y_2 \cosh y_0 ,$$

$n = 3$ için,

$$\begin{aligned} & \left. \frac{\partial^3 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} \\ &= \left. \frac{\partial^3 (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3) \cosh (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$A_3 = y_0 y_3 \sinh y_0 + y_0 y_1 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{6} y_0 y_1^3 \sinh y_0$$

$$+ 2 y_1 y_2 \sinh y_0 + \frac{1}{2} y_1^3 \cosh y_0 + y_3 \cosh y_0 ,$$

$n = 4$ için,

$$\left. \frac{\partial^4 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \lambda^4 A_4)}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0}$$

$$= \frac{\partial^4 (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4) \cosh(y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4)}{\partial \lambda^4} \bigg|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_4 = y_4 y_0 \sinh y_0 + y_4 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_2^2 y_0 \cosh y_0 + y_2^2 \sinh y_0 + y_1 y_3 y_0 \cosh y_0$$

$$+ 2y_1 y_3 \sinh y_0 + \frac{3}{2!} y_1^2 y_2 \cosh y_0 + \frac{1}{2!} y_1^2 y_2 y_0 \sinh y_0 + \frac{1}{6} y_1^4 \sinh y_0 + \frac{1}{24} y_1^4 y_0 \cosh y_0$$

Örnek 2.5

$f(y) = \ln(1+y)$, $-1 < y \leq 1$ fonksiyonu için A_0, A_1, A_2, A_3, A_4 Adomian polinomlarını bulunuz.

- **Taylor serisi yardımıyla**

$$A_0 = f(y_0) = \ln(1+y_0),$$

$$A_1 = y_1 f'(y_0) = \frac{y_1}{1+y_0},$$

$$A_2 = y_2 f'(y_0) + \frac{1}{2!} y_1^2 f''(y_0) = \frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1+y_0)^2},$$

$$A_3 = y_3 f'(y_0) + y_1 y_2 f''(y_0) + \frac{1}{3!} y_1^3 f'''(y_0) = \frac{y_3}{(1+y_0)} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3},$$

$$A_4 = y_4 f'(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_2^2 + y_1 y_3 \right) f''(y_0) + \left(\frac{1}{2!} y_1^2 y_2 \right) f'''(y_0) + \left(\frac{1}{4!} y_1^4 \right) f^{(4)}(y_0)$$

$$= \frac{y_4}{(1+y_0)} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{(1+y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^3} + \frac{y_1^2 y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1+y_0)^4}$$

- **Neumann serisi yardımıyla**

$$Y_\lambda = \sum_{i=0}^{\infty} y_i \lambda^i = y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n$$

$$f(y_\lambda) = \ln[1 + (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \cdots + \lambda^n y_n)]$$

$$\begin{aligned}
f(y_\lambda) = & \ln(1+y_0) + \lambda \left(\frac{y_1}{1+y_0} \right) + \lambda^2 \left(\frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1+y_0)^2} \right) \\
& + \lambda^3 \left(\frac{y_3}{(1+y_0)} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3} \right) \\
& + \lambda^4 \left(\frac{y_4}{(1+y_0)} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{(1+y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^3} + \frac{y_1^2 y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1+y_0)^4} \right) + \dots
\end{aligned}$$

elde edilir. Bütün polinomlar

$$A_0 = \ln(1+y_0),$$

$$A_1 = \frac{y_1}{1+y_0},$$

$$A_2 = \frac{y_2}{1+y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1+y_0)^2},$$

$$A_3 = \frac{y_3}{(1+y_0)} - \frac{y_1 y_2}{(1+y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1+y_0)^3},$$

$$A_4 = \frac{y_4}{(1+y_0)} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{(1+y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1+y_0)^3} + \frac{y_1^2 y_2}{(1+y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1+y_0)^4}$$

- **Parametrizasyon yöntemiyle**

İlk olarak $y(\lambda) = \sum_{k=0}^n y_k \lambda^k$ ve $f(y) = \sum_{k=0}^n \lambda^k A_k$ fonksiyonları

$$y(\lambda) = \ln \left[1 + \left(\sum_{k=0}^n y_k \lambda^k \right) \right] = \ln \left[1 + (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \dots + \lambda^n y_n) \right]$$

$\sum_{k=0}^n \lambda^k A_k = (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \dots + \lambda^n A_n)$ şeklinde tanımlanır. Buradan,

$n = 0$ için,

$$A_0 = \ln(1+y_0),$$

$n = 1$ için,

$$\left. \frac{\partial (A_0 + \lambda A_1)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial \ln[1 + (y_0 + \lambda y_1)]}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow A_1 = \frac{y_1}{1 + y_0},$$

$n = 2$ için,

$$\left. \frac{\partial^2 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2)}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^2 \ln[1 + (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2)]}{\partial \lambda^2} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_2 = \frac{y_2}{1 + y_0} - \frac{1}{2} \frac{y_1^2}{(1 + y_0)^2},$$

$n = 3$ için,

$$\left. \frac{\partial^3 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3)}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^3 \ln[1 + (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3)]}{\partial \lambda^3} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_3 = \frac{y_3}{(1 + y_0)} - \frac{y_1 y_2}{(1 + y_0)^2} + \frac{1}{3} \frac{y_1^3}{(1 + y_0)^3},$$

$n = 4$ için,

$$\left. \frac{\partial^4 (A_0 + \lambda A_1 + \lambda^2 A_2 + \lambda^3 A_3 + \lambda^4 A_4)}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} = \left. \frac{\partial^4 \ln[1 + (y_0 + \lambda y_1 + \lambda^2 y_2 + \lambda^3 y_3 + \lambda^4 y_4)]}{\partial \lambda^4} \right|_{\lambda=0} \Rightarrow$$

$$A_4 = \frac{y_4}{(1 + y_0)} - \frac{1}{2} \frac{y_2^2}{(1 + y_0)^2} - \frac{y_1 y_3}{(1 + y_0)^3} + \frac{y_1^2 y_2}{(1 + y_0)^3} - \frac{1}{4} \frac{y_1^4}{(1 + y_0)^4}$$

polinomları elde edilir.

2.5 Modifiye Adomian Ayrıştırma Metodu

Diferensiyel denklem operatör formda ele alınsın:

$$Lu + Ru = g. \quad (2.26)$$

Burada L yüksek mertebeden bir türev, R , L 'nin mertebesine eşit veya daha küçük bir lineer diferensiyel operatör, g ise kaynak terimi olsun [72]. (2.25) denklemin her iki tarafına L^{-1} integral operatörü uygulanırsa,

$$u = f - L^{-1}(Ru) \quad (2.27)$$

denklemini elde edilir. Burada f ; sınır koşulları ile g kaynak teriminin integralinden ortaya çıkan terimleri ifade eder. u çözümü bileşenlerinin sonsuz seri toplamı şeklinde tanımlansın. Buna göre seri toplamı,

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (2.28)$$

olarak ifade edilebilir. Ayrıştırma metodunun amacı $n \geq 0$ iken u_n bileşenlerini belirlemektir. Bu amaca ulaşmak için, ayrıştırma metodunda

$$u_0 = f,$$

$$u_{k+1} = -L^{-1}(Ru_k), \quad k \geq 0 \quad (2.29)$$

özyineleme (recursive) ilişkisi kullanılır. Bu eşitliklerden $n \geq 0$ iken u_n bileşenleri kolayca elde edilebilir.

Modifiye ayrıştırma metodu (2.28)' de verilen recursive denkleminiyle terimleri hassas bir şekilde belirler. Bu da u ' nun bileşenlerinin tanımlanmasında hız ve kolaylık sağlar. Özel durumlar için f fonksiyonu f_1 ve f_2 olmak üzere iki kısmi fonksiyonun toplamı şeklinde tanımlansın. Böylece,

$$f = f_1 + f_2 \quad (2.30)$$

olur. Buradan (2.29), (2.28) özyineleme (recursive) denklemine uyarlanır. Hesaplamaları azaltmak için f fonksiyonun bir parçası u_0 olarak tanımlanır. f 'in diğer bileşeni u_1 bileşenine eklenir. Başka bir ifadeyle modifiye ayrıştırma metodu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$u_0 = f_1 ,$$

$$u_1 = f_2 - L^{-1}(Ru_0) ,$$

$$u_{k+1} = -L^1(Ru_k), \quad k \geq 1.$$

Burada önemli bir nokta da ilk iki bileşen olan u_0 ve u_1 bileşenlerinde değişiklik yapılabilmesidir. u_0 ve u_1 değerleri önemsiz olmasına rağmen, çözüme hızlı yakınsaklıkta ve çözümün basamaklarını azaltmada önemli rol oynarlar. Modifiye metodu kullanmayla ilgili iki önemli nokta vardır. Bunlardan ilki, f_1 ve f_2 fonksiyonlarını doğru seçmektir. Bu seçim doğru yapılırsa birkaç iterasyonla u 'nun tam çözümüne kolayca ulaşılabilir. Hatta bazen sadece iki bileşenle bile sonuç elde edilebilir. Modifiyenin bu başarısı f_1 ve f_2 fonksiyonlarının seçimine bağlıdır. İkincisi ise, eğer f sadece bir terimden oluşuyorsa bu durumda standart ayrıştırma metodu kullanılmalıdır [2].

Örnek 2.6

$$u_x + u_y = 2xy^2 + 2x^2y, \quad (2.31)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u(0, y) = 0$$

Örnek 2.1'de standart ayrıştırma metoduyla çözülen kısmi diferensiyel denklemi modifiye ayrıştırma metodunu kullanarak çözünüz ve sonucu yorumlayınız.

Çözüm:

Verilen şart kullanılarak (2.30) denklemi operatör formda

$$L_x u = 2xy^2 + 2x^2y - L_y u \quad (2.32)$$

şeklinde yazılır. (2.31) denkleminin her iki tarafına L^{-1} integral operatörü uygulanarak sınır şartları yerine koyulursa denklem,

$$u(x, y) = x^2 y^2 + \frac{2}{3} x^3 y - L_x^{-1}(u_y)$$

olur. $f(x, y)$ fonksiyonu modifiye ayrıştırma metoduna göre $f_1 + f_2$ olarak yazılırsa burada f_1 ve f_2

$$f_1(x, y) = x^2 y^2 ,$$

$$f_2(x, y) = \frac{2}{3} x^3 y$$

şeklinde seçilebilir. Böylece $u(x, y)$ bileşenleri tanımlanarak

$$u_0(x, y) = x^2 y^2 ,$$

$$u_1(x, y) = \frac{2}{3} x^3 y - L_x^{-1} \left((x^2 y^2)_y \right) = \frac{2}{3} x^3 y - \frac{2}{3} x^3 y = 0 ,$$

$$u_{k+1}(x, y) = -L^{-1} \left((u_k)_y \right), \quad k \geq 1.$$

özyineleme (recursive) ilişkisi belirlenir. Buradan tam çözüm,

$$u(x, y) = x^2 y^2$$

olur. Bu çözüm gösteriyor ki, standart ayrıştırma metodu kullanılarak sonuca ulaşmak daha fazla bileşen bulmayı gerektirirken modifiye ayrıştırma metoduyla aynı sonuç daha az hesaplamayla kolayca elde edilebilir. Bu da modifiye ayrıştırma metodunun standart ayrıştırma metoduna olan üstünlüğünü ifade eder.

2.6 AAM ile Picard Metodunun Karşılaştırılması

Adomian ayrıştırma metodu Picard yaklaşım metoduna benzerdir. Adomian ayrıştırma methodu

$$u(x) = b + \int_0^x f(x, u) dx \quad (2.33)$$

integral denklemin $u(x)$ çözümüyle ifade edilebilir. Seri form tanımından,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (2.34)$$

(2.32) denklemini (2.33) ayrıştırma denkleminin her iki tarafında yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = b + \int_a^x f \left(x, \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) dx \quad (2.35)$$

olur. $u(x)$ bilinmeyen fonksiyonunun $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ bileşenleri özyineleme (recursive) ifadesiyle tanımlanır ve

$$u_0(x) = b ,$$

$$u_1(x) = \int_a^x f(x, u_0) dx ,$$

$$u_2(x) = \int_a^x f(x, u_1) dx ,$$

$$u_3(x) = \int_a^x f(x, u_2) dx$$

(2.34) denkleminin $u(x)$ çözümünün $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots$ bileşenlerini belirlemek için yukarıda ifade edilen ayrıştırma özyineleme (recursive) formunda yazılabilir:

$$u_0(x) = b ,$$

$$u_{n+1}(x) = \int_a^x f(x, u_n) dx. \quad (2.36)$$

Öncelikle bu bileşenler belirlenir. (2.32) denkleminin $u(x)$ çözümü (2.33) ayrıştırma denklemini kullanılarak seri formda belirlenir. $u(x)$ çözümü için belirlenen seriler kapalı formda tam çözüm sağlar. Fakat kesin çözümler için (2.33) denklemini değerlendiremeyebilir, eğer sayısal çözümler istenilirse $\sum_{n=0}^k u_n(x)$ serileri genellikle $u(x)$ çözümüne yaklaşımda kullanılır. Fakat bu ayrıştırma metodunda bazı engeller bulunabilir. Bu nedenle, Picard metoduna benzemeyen basit bir ayrıştırma metodunu amaç edinilebilir.

Yeni ayrıştırma sürecinde, açık bir sonsuz seride çözüm aşağıdaki şekilde genişletilebilir:

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

$u(x)$ çözüm fonksiyonunu içeren $f(x, u)$ fonksiyonu Taylor serilerine genişletilirse,

$$f(x, u) = f(x, u_0) + (u - u_0) f_u(x, u_0) + \frac{(u - u_0)^2}{2!} f_{uu}(x, u_0)$$

$$+ \frac{(u-u_0)^3}{3!} f_{uuu}(x, u_0) + \frac{(u-u_0)^4}{4!} f_{uuuu}(x, u_0) + \dots \quad (2.37)$$

olur. Verilen tanımda Taylor serileri mutlak ve düzgün yakınsaktır. (2.36) denkleminde (2.35) denklemini kullanarak ,

$$\begin{aligned} f(x, u) &= f(x, u_0) + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) f_u(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{2!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}^2 f_{uu}(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{3!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}^3 f_{uuu}(x, u_0) \\ &+ \frac{1}{4!} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right\}^4 f_{uuuu}(x, u_0) \end{aligned} \quad (2.38)$$

şeklinde yazılır. Alt dizi

$$f(x, u) = A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots + A_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(x) \quad (2.39)$$

olarak ifade edilir ve $A_n(x, u)$ 'in farklı terimleri tanımlanırsa,

$$A_0 = f(x, u_0) ,$$

$$A_1 = u_1 f_u(x, u_0) ,$$

$$A_2 = u_2 f_{uu}(x, u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 f_{uu}(x, u_0) ,$$

$$A_3 = u_3 f_{uuu}(x, u_0) + \frac{1}{2} (2u_1 u_2) f_{uuu}(x, u_0) + \frac{1}{6} u_1^3 f_{uuu}(x, u_0) \quad (2.40)$$

olur ve böylece integral denklem

$$u(x) = b + \int_0^x f(x, u) dx, \quad (2.41)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = b + \int_a^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) dx \quad (2.42)$$

elde edilir veya basitçe

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = b + \int_0^x [A_0(x) + A_1(x) + A_2(x) + \dots] dx \quad (2.43)$$

$u_0(x), u_1(x), u_2(x), \dots$ bileşenleri recurrence ifadesi kullanılarak belirlenirse,

$$u_0(x) = b,$$

$$u_1(x) = \int_a^x A_0(x) dx = \int_a^x A_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_a^x A_1(x) dx = \int_a^x A_1(t) dt,$$

$$u_3(x) = \int_a^x A_2(x) dx = \int_a^x A_2(t) dt,$$

$$u_4(x) = \int_a^x A_3(x) dx = \int_a^x A_3(t) dt,$$

$$u_{n+1}(x) = \int_a^x A_n(x) dx = \int_a^x A_n(t) dt, \quad n \geq 1 \quad (2.44)$$

Sonuç olarak, seri formdaki (2.43) denkleminin çözümleri belirlenir. Yukarıda belirtilen serilerle kapalı formda çözüm elde edilebilir veya sayısal yaklaşım arzu ediliyorsa

$\sum_{n=1}^k u_n(x)$ sonlu serisi kullanılabilir. Picard yaklaşım metodu belirlenerek ayrıştırma

metodu örneklendirilebilir [12], [73], [74], [75], [76], [77], [78], [79].

Örnek 2.7

Picard metoduyla aşağıdaki başlangıç değer problemini çözün ve sonucu ayrıştırma metodu ile sağlama yapın.

$$\frac{du}{dx} = x + u, \quad u(0) = 0.$$

Çözüm:

- **Picard Metodu:**

x 'e göre denklemin integrali alınır ve başlangıç koşulu kullanılırsa,

$$u(x) = \int_0^x (x + u) dx$$

elde edilir. İlk yaklaşım,

$$u_1(x) = \int_0^x x dx = \frac{x^2}{2}$$

İkinci yaklaşım,

$$u_2(x) = \int_0^x (x + u_1) dx = \int_0^x \left(x + \frac{x^2}{2} \right) dx = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!}$$

olur. Bu şekilde işlem yapılarak, n . yaklaşım yazılır:

$$u_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots$$

Böylece, istenen çözüm,

$$u_n(x) = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + \dots = e^x - (1 + x)$$

şeklinde hesaplanmış olur.

- **Adomian Ayrıştırma Metodu:**

Verilen integral denklem,

$$u(x) = \int_0^x (x + u) dx = \frac{x^2}{2} + \int_0^x u(t) dt$$

şeklinde yazılarak $u(x)$ serisi ayrıştırılabilir.

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Yukarıdaki integral denklemde bu seriler yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

elde edilir ve denklem terimleri,

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$u_1(x) = \int_0^x u_0(t) dt = \int_0^x \frac{t^2}{2} dt = \frac{x^3}{3!},$$

$$u_2(x) = \int_0^x u_1(t) dt = \int_0^x \frac{t^3}{3!} dt = \frac{x^4}{4!},$$

$\vdots$

olur. Böylece çözüm,

$$u(x) = \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots = e^x - (1+x).$$

şeklinde bulunur. Bu iki metotla çözümler tanımlanır ve başlangıç değer probleminin analitik çözümü

$$u(x) = e^x - (1+x)$$

olur.

Örnek 2.8

$$\frac{du}{dx} = xu, \quad u(0) = 1$$

Başlangıç değer probleminin çözümünü bulunuz.

- **Picard Metot:**

Başlangıç değer problemi integral denklem formuna

$$u(x) = 1 + \int_0^x tu(t) dt$$

şeklinde getirilebilir ve ilk yaklaşım,

$$u_1(x) = 1 + \int_0^x t(1) dt = 1 + \frac{x^2}{2}$$

İkinci yaklaşım,

$$u_2(x) = 1 + \int_0^x t \left(1 + \frac{t^2}{2!} \right) dt = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2$$

olarak elde edilir. Bu şekilde işlem yapılırsa, n . yaklaşım

$$u_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \dots + \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n$$

şeklinde türetilir. Böylece, $n \rightarrow \infty$ iken

$$u(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} u_n(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$$

yazılabilir.

- **Adomian Ayrıştırma Metodu:**

Çözümü $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ serilerine ayrıştırılabilir. Bu seriler integral denklemde yerine konularak

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + \int_0^x \left\{ t \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \right\} dt$$

elde edilir. Bu serilerin terimlerinin farklı mertebeden denkleminde integral denklemlerin kümesi yapılandırılabilir;

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = \int_0^x t u_0(t) dt = \int_0^x t(1) dt = \frac{x^2}{2},$$

$$u_2(x) = \int_0^x t u_1(t) dt = \int_0^x t \left(\frac{t^2}{2} \right) dt = \frac{x^2}{4 \cdot 2} = \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2,$$

⋮

$$u_n(x) = \frac{1}{n!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^n$$

Böylece çözüm,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2!} \left(\frac{x^2}{2} \right)^2 + \dots = e^{\frac{x^2}{2}}$$

olarak hesaplanır ve analitik çözüm $u(x) = e^{\frac{x^2}{2}}$ olur.

AAM UYGULAMALARI ve ÖRNEKLER**3.1 Adi Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü**

Adomian ayrıştırma metodunda diferensiyel denklemlerin çözümü, kapalı formda veya uygun sayıda terimler içeren seri formda aranır. Tam çözümde elde edilen ilk denklem ve ikinci denklem için tanımlanan seri yaklaşımındaki iki adi diferensiyel denklem Adomian ayrıştırma metodu kullanılarak kolayca elde edilebilir [3]. Adi diferensiyel denklemler için ayrıştırma metodunu iki denklemle ifade etmek gerekirse;

İlk denklem;

$$u'(x) = u(x) , \quad u(0) = A \quad (3.1)$$

şeklinde tanımlansın. (3.1) denklemini operatör formda,

$$Lu = u \quad (3.2)$$

olur. Burada L diferensiyel operatörü

$$L = \frac{d}{dx}$$

verilsin. Böylece L^{-1} integral operatörü,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) dx$$

olur. L^{-1} integral operatörü (3.2) denkleminin her iki tarafına uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılırsa,

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(u),$$

$$u(x) - u(0) = L^{-1}(u) \quad (3.3)$$

elde edilir. Buradan, (3.3) denklemi başlangıç şartı yerine yazılarak;

$$u(x) = A + L^{-1}(u) \quad (3.4)$$

olarak ifade edilebilir.

$$u = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \quad (3.5)$$

(3.5)' te verilen ayrıştırma serisi (3.4) denkleminde yerine yazılır ve denklem

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + L^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right) \quad (3.6)$$

olur. (3.6) denkleminde yineleme ilişkisi,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A, \\ u_{k+1}(x) &= L^{-1}(u_k(x)), \quad k \geq 0 \end{aligned} \quad (3.7)$$

olarak ifade edilir. Sonuç olarak (3.7) algoritmasından,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= A, \\ u_1(x) &= L^{-1}(u_0(x)) = Ax, \\ u_2(x) &= L^{-1}(u_1(x)) = A \frac{x^2}{2!}, \\ u_3(x) &= L^{-1}(u_2(x)) = A \frac{x^3}{3!}, \\ &\vdots \end{aligned}$$

şeklinde devam eden bileşenler bulunur. Buradan seri formdaki çözüm,

$$u(x) = A \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots \right)$$

şeklinde belirlenir. Kapalı formda ise,

$$u(x) = Ae^x$$

olarak yazılabilir. İkinci denklem ise

$$u''(x) = xu(x) , \quad u(0) = A , \quad u'(0) = B \quad (3.8)$$

Airy denklemi olsun. (3.8) operatör formda

$$Lu = xu \quad (3.9)$$

şeklinde yazılır. Burada L ,

$$L = \frac{d^2}{dx^2}$$

diferensiyel operatördür. Dolayısıyla L^{-1} ,

$$L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx \quad (3.10)$$

integral operatörü olur. (3.10) integral operatörü (3.9) denkleminin her iki tarafına uygulanır ve

$$L^{-1}(Lu) = L^{-1}(xu)$$

elde edilir. Gerekli işlemler yapıldıktan sonra,

$$u(x) - xu'(0) - u(0) = L^{-1}(xu)$$

denklemini yazılır. Verilen başlangıç şartları yerine koyularak denklem,

$$u(x) = A + Bx + L^{-1}(xu) \quad (3.11)$$

haline gelir. Ayrıştırma serisi (3.11)'e uygulanır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = A + Bx + L^{-1} \left(x \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \right)$$

olur. Ayrıştırma serisi ile özyineleme (recursive) ilişkisi;

$$u_0(x) = A + Bx ,$$

$$u_{k+1}(x) = L^{-1}(xu_k(x)) , \quad k \geq 0$$

belirlenir. Sonuç olarak,

$$u_0(x) = A + Bx ,$$

$$u_1(x) = L^{-1}(xu_0(x)) = A\frac{x^3}{6} + B\frac{x^4}{12},$$

$$u_2(x) = L^{-1}(xu_1(x)) = A\frac{x^6}{180} + B\frac{x^7}{504},$$

$\vdots$

bileşenlerine ulaşılır ve çözüm,

$$u(x) = A\left(1 + \frac{x^3}{6} + \frac{x^6}{180} + \dots\right) + B\left(x + \frac{x^4}{12} + \frac{x^7}{504} + \dots\right)$$

elde edilir. Yaklaşımın doğruluğunu artırmak için diğer bileşenler de kolayca hesaplanıp çözüme eklenebilir [64].

3.1.1 Adi Diferensiyel Denklem

$$y' + y^2 = 4, \quad y(0) = 0$$

Adi diferensiyel denklemini AAM ile çözünüz [3].

Çözüm:

Her iki tarafa L^{-1} operatörü uygulanarak

$$y = 4x - L^{-1}(y^2)$$

elde edilir. $y(x)$ çözümü için ayrıştırma serisi kullanılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = 4x - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

eşitliğine ulaşılır. Buradan,

$$y_0 = 4x,$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0$$

yineleme ilişkisi kolayca yazılabilir.

y^2 için lineer olmayan Adomian polinomları kullanılır ve çözüm,

$$y_0 = 4x,$$

$$y_1 = -L^1 A_0 = -L^{-1}(y_0^2) = -L^{-1}((4x)^2) = -\frac{16x^3}{3} = -4^2 \frac{x^3}{3},$$

$$y_2 = -L^1 A_1 = -L^{-1}(2y_0 y_1) = -L^{-1}\left(-8x \frac{16x^3}{3}\right) = L^{-1}\left(\frac{128x^4}{3}\right) = 4^3 \frac{2x^5}{15},$$

$$y_3 = -L^1 A_2 = -L^{-1}(2y_0 y_2 + y_1^2) = -\frac{4352x^7}{315} = -4^4 \frac{17x^7}{315},$$

$$y(x) = 4x - 4^2 \frac{1}{3}x^3 + 4^3 \frac{2}{15}x^5 - 4^4 \frac{17}{315}x^7 + \dots$$

şeklinde seri formda elde edilir. Bu seri kapalı formda;

$$y(x) = \tanh(4x) \text{ olarak ifade edilebilir.}$$

3.1.2 Lineer Olmayan Sarkaç Denklemi

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = \sin u \quad (3.12)$$

lineer olmayan adi diferensiyel sarkaç denklemini

$$u(0) = \pi, \quad \frac{du}{dt}(0) = -2 \quad (3.13)$$

başlangıç koşullarını kullanarak çözünüz [79].

Çözüm:

Ayrıştırma metodu kullanılarak (3.12) ve (3.13) denklemlerinin tam çözümlerine denk sonuçların nasıl elde edilebileceği gösterilebilir.

$$\sin \frac{u}{2} = \sec(ht)$$

Burada, lineer olmayan fonksiyon $N(u) = \sin u$ fonksiyonudur. Eğer $L_t(u) = \frac{d^2 u}{dt^2}$

olarak alınırsa, (3.12) denklemi operatör formda ifade edilebilir. 0'dan t 'ye, t 'ye göre iki kere integral alınırsa,

$$u(t) = \pi - 2t + L_t^{-1}N(u) = \pi - 2t + \int_0^t \int_0^t N(u(t)) dt dt \quad (3.14)$$

elde edilir.

Böylece,

$$u(t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) ,$$

$$N(u) = \sin u = \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) \quad (3.15)$$

yazılabilir. Çeşitli özyinelemeler (recursive) aşağıdaki şekilde verilir;

$$u_{n+1}(t) = \int_0^t \int_0^t A_n(t) dt dt , \quad n \geq 0 \quad (3.16)$$

$$u_0(t) = \pi - 2t$$

$$N(u) = \sin u \text{ için,}$$

$$A_0 = \sin u_0 ,$$

$$A_1 = u_1 \cos u_0 ,$$

$$A_2 = u_2 \cos u_0 - \frac{u_1^2}{2!} \sin u_0 ,$$

$$A_3 = u_3 \cos u_0 - u_1 u_2 \sin u_0 - \frac{u_1^3}{3!} \cos u_0$$

⋮

Bu yüzden, u_0 bilindiği için, (3.14) ve (3.15) denklemleri $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ seri çözümlerini sağlar.

Buradan,

$$u_0 = \pi - 2t ,$$

$$u_1 = \int_0^t \int_0^t A_0 dt dt ,$$

$$u_2 = \int_0^t \int_0^t A_1 dt dt ,$$

$$u_3 = \int_0^t \int_0^t A_2 dt dt ,$$

⋮

$$u_{n+1} = \int_0^t \int_0^t A_n dt dt$$

(3.16) denklemi kullanılarak çeşitli yinelemeler verilebilir;

$$u_1 = \frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin 2t ,$$

$$u_2 = \frac{5t}{32} - \frac{1}{8} \sin 2t + \frac{t}{8} \cos 2t - \frac{1}{64} \sin 2t \cos 2t .$$

Burada $\cos(\pi - 2t) = -\cos 2t$ ve $\sin(\pi - 2t) = \sin 2t$ özellikleri kullanılır. Daha fazla yineleme basitçe belirlenir. İlk altı yineleme birleştirilir ve $t=0$ etrafında Taylor Serisine açılırsa,

$$u = \pi - 2t + \frac{2}{3!}t^3 - \frac{10}{5!}t^5 + \frac{61}{7!}t^7 - \frac{2770}{9!}t^9 + \frac{103058}{11!}t^{11} + \dots$$

Taylor seri açılımı $\sin \frac{u}{2} = \sec(ht)$ ile denk gelmiştir.

3.1.3 Lineer Olmayan Adi Diferensiyel Denklem

$$y'' + (y')^2 + y^2 = 1 - \cos x \quad (3.17)$$

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

Gürültü terim (noise term) olgusunu kullanarak ikinci mertebeden lineer olmayan adi diferensiyel denklemi çözüünüz [3].

Çözüm:

L^{-1} çift kat integral operatörü (3.17) denkleminin her iki tarafına uygulanarak,

$$y(x) = \cos x + \frac{1}{2}x^2 - L^{-1}\left((y')^2 + y^2\right) \quad (3.18)$$

elde edilir. Ayırıştırma metodu serisi (3.18) denkleminde yerine yazılarak

$$\sum_{n=0}^{\infty} y_n(x) = \cos x + \frac{x^2}{2} - L^{-1}\left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n\right)$$

eşitliğinden yineleme ilişkisi kolayca görülebilir.

$$y_0 = \cos x + \frac{x^2}{2} ,$$

$$y_{k+1} = -L^{-1}(A_k), \quad k \geq 0$$

Bu ilişkiden hareketle,

$$y_0 = \cos x + \frac{x^2}{2},$$

$$y_1 = -L^{-1}\left((y')^2 + y^2\right) = -\frac{x^2}{2!} + \dots$$

Sıfırıncı bileşen trigonometrik $\cos x$ fonksiyonunu içerdiği için burada gürültü terim olgusu kullanılır. $\cos x$ terimi dışındaki terimler $\frac{x^2}{2}$ ve $-\frac{x^2}{2}$ şeklinde birbirlerini götürürler. Bu işlem diğer bileşenlerde de devam eder. Böylece y_0 'ın iptal edilmeyen terimi diferensiyel denklemin tam çözümünü sağlar. Buradan çözüm,

$$y(x) = \cos x$$

olarak bulunur.

3.2 Kısmi Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü

Bölüm 3.1'de adi diferensiyel denklemler için Adomian ayrışım metodunun problemlere nasıl uygulandığı anlatılmıştı. Bu bölümde de kısmi bir diferensiyel denklem konu edilecektir.

$$u_x + u_y = f(x, y), \quad u(0, y) = g(y), \quad u(x, 0) = h(x) \quad (3.19)$$

Homojen olmayan kısmi diferensiyel denklemi ele alınsın. (3.19) operatör formda,

$$L_x u + L_y u = f(x, y)$$

şeklinde yazılır. Burada

$$L_x = \frac{\partial}{\partial x}, \quad L_y = \frac{\partial}{\partial y}$$

tersi alınabilir operatörler ve

$$L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x (\cdot) dx$$

$$L_y^{-1}(\cdot) = \int_0^y (\cdot) dy$$

integral operatörleridir.

$$L_x^{-1}L_x u(x, y) = u(x, y) - u(0, y) \quad (3.20)$$

olduğu göz önüne alınarak, (3.20) denkleminin her iki tarafına L_x^{-1} uygulanırsa;

$$L_x^{-1}L_x u(x, y) = L_x^{-1}f(x, y) - L_x^{-1}(L_y u)$$

elde edilir. Verilen şartlar yerine koyulur ve denklem;

$$u(x, y) = g(y) + L_x^{-1}(f(x, y)) - L_x^{-1}(L_y u)$$

olur. Ayrıştırma serisi yardımıyla,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = g(y) + L_x^{-1}(f(x, y)) - L_x^{-1}\left(L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)\right)\right)$$

eşitliği yazılır. Bu seri,

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = g(y) + L_x^{-1}(f(x, y)) - L_x^{-1}L_y(u_0 + u_1 + u_2 + \dots)$$

şeklinde yeniden ifade edilir. Burada sıfıncı bileşen daima verilen başlangıç koşulu olarak alınır. Diğer terimler ise $L_x^{-1}(f(x, y))$ ' den elde edilir. Buna göre,

$$u_0(x, y) = g(y) + L_x^{-1}(f(x, y))$$

$$u_{k+1}(x, y) = -L_x^{-1}L_y(u_k), \quad k \geq 0$$

yazılır ve sonuç olarak, diğer bileşenler u_{k+1} , $k \geq 0$ ilişkisiyle belirlenir. Böylece,

$$u_0(x, y) = g(y) + L_x^{-1}(f(x, y)),$$

$$u_1(x, y) = -L_x^{-1}(L_y u_0(x, y)),$$

$$u_2(x, y) = -L_x^{-1}(L_y u_1(x, y)),$$

$$u_3(x, y) = -L_x^{-1}(L_y u_2(x, y))$$

$\vdots$

daha fazla bileşen bulunarak doğru bir yaklaşım elde edilir ve tam çözüme ulaşılır. $u(x, y)$ 'ye y çözümü ile de ulaşmak mümkündür. Diğer nümerik yöntemlerle karşılaştırıldığında bu metodun yüksek derecede doğruluğu ve güçlü yakınsaklığı birçok bilim adamı tarafından ispatlanmıştır [3], [64].

3.2.1 MAAM ile Kısmi Diferensiyel Denklem Çözümü

$$u_x + u_y = 2x + \cos y, \quad u(0, y) = 1 + \sin y \quad (3.21)$$

Modifiye ayrıştırma metodunu kullanarak kısmi diferensiyel denklemi çözüünüz [3].

Çözüm:

Verilen şart kullanılarak (3.21) denklemi operatör formda;

$$L_x u = 2x + \cos y - u_y \quad (3.22)$$

şeklinde yazılır. (3.22) denkleminin her iki tarafına L^{-1} integral operatörü uygulanarak sınır şartları yerine koyulursa denklem;

$$u(x, y) = 1 + \sin y + x^2 + x \cos y - L_x^{-1}(u_y)$$

olur. $f(x, y)$ fonksiyonu Modifiye ayrıştırma metoduna göre $f_1 + f_2$ olarak yazılırsa burada f_1 ve f_2

$$f_1(x, y) = 1 + x^2 + \sin y,$$

$$f_2(x, y) = x \cos y$$

şeklinde seçilebilir. Böylece $u(x, y)$ bileşenleri tanımlanarak;

$$u_0(x, y) = 1 + x^2 + \sin y,$$

$$u_1(x, y) = x \cos y - L_x^{-1}\left(\left(1 + x^2 + \sin y\right)_y\right) = x \cos y - x \cos y = 0,$$

$$u_{k+1}(x, y) = -L^{-1}\left((u_k)_y\right), \quad k \geq 1$$

özyineleme (recursive) ilişkisi belirlenir. Buradan tam çözüm,

$$u(x, y) = 1 + x^2 + \sin y$$

olur.

3.2.2 Homojen Olmayan Adveksiyon (Advection) Denklemi

$$u_t + uu_x = x + xt^2, \quad u(x, 0) = 0 \quad (3.23)$$

Homojen olmayan Adveksiyon kısmi diferensiyel denklemini Adomian ve Modifiye Adomian ayrıştırma metoduyla çözüünüz [64].

Çözüm:

- **Standart Adomian Metodu ile Çözüm:**

(3.23) denkleminin her iki tarafına L^{-1} integral operatörü uygulanırsa;

$$u(x, t) = xt + \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{2}L^{-1}\left([u^2]\right)_x$$

elde edilir. Özyineleme (recursive) ilişkisi tanımlanarak;

$$u_0 = xt + \frac{1}{3}xt^3,$$

$$u_1 = -\frac{1}{3}xt^3 - \frac{2}{15}xt^5 - \frac{1}{63}xt^7 \dots$$

seri yoluyla diğer bileşenler elde edilebilir. Ayrıca u_0 ve u_1 bileşenlerindeki $\frac{1}{3}xt^3$ ve

$-\frac{1}{3}xt^3$ gürültü terimleri gibi diğer terimlerde birbirlerini yok ederek tam çözüm;

$u = xt$ olarak bulunur.

- **Modifiye Ayrıştırma Metoduyla Çözüm:**

İlk olarak f fonksiyonu

$$f_1 = xt,$$

$$f_2 = \frac{1}{3}xt^3$$

şeklinde iki parçaya bölünür. Özyineleme (recursive) ilişkisi için $u_0 = f_1$ olarak seçilir.

$$u_0 = xt,$$

$$u_1 = \frac{1}{3}xt^3 - \frac{1}{2}L^{-1}\left([u^2]\right)_x = 0$$

$$u_{k+2} = 0, \quad k \geq 0$$

Buradan tam çözüm,

$u = xt$ şeklinde elde edilir.

3.2.3 Homojen Kısmi Diferensiyel Denklem

$$xu_x + u_y = 3u, \quad u(x, 0) = x^2, \quad u(0, y) = 0$$

Homojen kısmi diferensiyel denklemini AAM ile çözünüz [3].

Çözüm:

Denklem operatör formda tanımlansın

$$L_y u(x, y) = 3u(x, y) - xL_x u(x, y).$$

Eşitliğin her iki tarafına L_y^{-1} uygulanır ve verilen $u(x, 0) = x^2$ şartı sağlanır.

$$u(x, y) = x^2 + L_y^{-1}(3u - xL_x u)$$

Denklemde $u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)$ yerine yazılarak;

$$u(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = x^2 + L_y^{-1} \left(3 \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) - xL_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) \right)$$

$u(x, y)$ 'nin birkaç terimi:

$$u_0 + u_1 + u_2 + \dots = x^2 + L_y^{-1} \left(3(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) - xL_x(u_0 + u_1 + u_2 + \dots) \right)$$

şeklinde ifade edilir. İşlemden önce özyineleme (recursive) denklemi yazılır:

$$u(x, 0) = x^2$$

$$u_{k+1}(x, y) = L_y^{-1} \left(3(u_k) - xL_x(u_k) \right), \quad k \geq 0$$

Böylece $u_0, u_1, u_2, \dots$ bileşenlerinden birkaçı aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$u(x, 0) = x^2 ,$$

$$u_1(x, y) = L_y^{-1}(3u_0 - xL_x u_0) = x^2 y ,$$

$$u_2(x, y) = L_y^{-1}(3u_1 - xL_x u_1) = \frac{x^2 y^2}{2!} ,$$

Buradan $u_k(x, y) = 0$, $k \geq 2$ olduğu gözlemlenir. Sonuç olarak, çözüm

$$u(x, y) = u_0 + u_1 + \dots = x^2 \left(1 + y + \frac{y^2}{2!} + \dots \right) = x^2 e^y$$

olmak üzere belirlenir.

3.2.4 Çok Boyutlu Isı Denklemi

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} , \quad 0 < x, \quad y < \pi, \quad t > 0$$

$$\text{Sınır şartlar} \quad u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = 0 , \quad u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0$$

$$\text{Başlangıç şartı} \quad u(x, y, 0) = \sin x \sin y$$

denklemini ADM ile çözünüz [3].

Çözüm:

Denklem operatör formda;

$$L_t u = L_x u + L_y u$$

olarak ifade edilir. L_t^{-1} integral operatörü uygulanarak başlangıç şartı kullanılırsa;

$$u(x, y, t) = \sin x \sin y + L_t^{-1}(L_x u + L_y u) \quad (3.24)$$

olur. Ayrıştırma metodu $u(x, y, t)$ serilerinin çözümleri şeklinde aşağıdaki gibi tanımlanır;

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t) \quad (3.25)$$

Yineleme algoritması kullanarak $u_n(x, y, t)$, $n \geq 0$ bileşenleri belirlenir. (3.25) eşitliği

seri formu (3.24) denkleminde yerine yazılırsa;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sin x \sin y + L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) + L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right)$$

eşitliğine ulaşılır.

$u_n(x, y, t)$, $n \geq 0$ bileşenleri yineleme algoritması ile aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

$$u_0(x, y, t) = \sin x \sin y ,$$

$$u_{k+1}(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_k + L_y u_k) , \quad k \geq 0$$

İlk birkaç terim verilerek,

$$u_0(x, y, t) = \sin x \sin y ,$$

$$u_1(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_0 + L_y u_0) = -2t \sin x \sin y ,$$

$$u_2(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_1 + L_y u_1) = \frac{(2t)^2}{2!} \sin x \sin y ,$$

$$u_3(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_2 + L_y u_2) = \frac{-(2t)^3}{3!} \sin x \sin y$$

çözüm seri formda,

$$u(x, y, t) = \sin x \sin y \left(1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} \dots \right)$$

olarak ifade edilir. Bu çözüm kapalı formda;

$$u(x, y, t) = e^{-2t} \sin x \sin y$$

elde edilir.

3.2.5 Çok Boyutlu Homojen Olmayan Isı Denklemi

Aşağıdaki sınır ve başlangıç değer problemini Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak çözünüz [3].

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + \sin y , \quad 0 < x, \quad y < \pi, \quad t > 0$$

$$\text{Sınır şartları} \quad u(0, y, t) = u(\pi, y, t) = \sin y , \quad u(x, 0, t) = u(x, \pi, t) = 0$$

$$\text{Başlangıç şartı} \quad u(x, y, 0) = \sin x \sin y + \sin y$$

Çözüm:

Homojen olmayan denklemlerin çözümü için değişkenlerine Ayırıştırma Metoduna benzer ayırıştırma metodu uygulanarak, dönüşüme ihtiyaç duyulmadan çözüme ulaşılabilir. Operatör formda yazılan denkleme L_t^{-1} integral operatörü uygulanır ve

$$u(x, y, t) = \sin x \sin y + \sin y + t \sin y + L_t^{-1} (L_x u + L_y u)$$

elde edilir. $u(x, y, t)$ için ayırıştırma serileri kullanılarak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sin x \sin y + \sin y + t \sin y + L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) + L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right)$$

Yineleme ilişkisi:

$$u_0(x, y, t) = \sin x \sin y + \sin y + t \sin y ,$$

$$u_{k+1}(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_k + L_y u_k), \quad k \geq 0$$

şeklinde yazılır. İlk birkaç terim,

$$u_0(x, y, t) = \sin x \sin y + \sin y + t \sin y ,$$

$$u_1(x, y, t) = L_x^{-1} (L_x u_0 + L_y u_0) = -2t \sin x \sin y - t \sin y - \frac{t^2}{2!} \sin y ,$$

$$u_2(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_1 + L_y u_1) = \frac{(2t)^2}{2!} \sin x \sin y + \frac{t^2}{2!} \sin y + \frac{t^3}{3!} \sin y$$

olarak yazılabilir. Çözüm seri formda:

$$u(x, y, t) = \sin y + \sin x \sin y \left(1 - 2t + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \dots \right) \\ + \left(t \sin y - t \sin y - \frac{t^2}{2!} \sin y + \frac{t^2}{2!} \sin y - \dots \right)$$

kapalı formda,

$$u(x, y, t) = \sin y + e^{-2t} \sin x \sin y$$

olarak ifade edilir.

3.2.6 Çok Boyutlu Homojen Isı Denklemi

$$u_t = 3(u_{xx} + u_{yy}) \text{ ve } 0 < x, y < \pi, t > 0$$

Sınır şartları:

$$u(0, y, t) = -u(\pi, y, t) = -e^{-6t} \sin y$$

$$u(x, 0, t) = -u(x, \pi, t) = -e^{-6t} \sin x$$

Başlangıç şartları:

$$u(x, y, 0) = \sin(x - y)$$

Ayrıştırma metodunu kullanarak homojen başlangıç-sınır değer problemini çözünüz [3].

Çözüm:

Denklem operatör formda yazılarak L_t^{-1} integral operatörü uygulanır.

$$u(x, y, t) = \sin(x - y) + 3L_t^{-1}(L_x u + L_y u) \quad (3.26)$$

Ayrıştırma seri formu olan,

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t)$$

(3.26) denklemde yerine konularak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sin(x - y) + 3L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) + L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right]$$

denklemleri elde edilir ve buradan özyineleme (recursive) ilişkisi;

$$u_0(x, y, t) = \sin(x - y),$$

$$u_{k+1}(x, y, t) = L_t^{-1}(L_x u_k + L_y u_k), \quad k \geq 0$$

olarak belirlenir. Birkaç terim;

$$u_0(x, y, t) = \sin(x - y),$$

$$u_1(x, y, t) = 3L_t^{-1}(-\sin(x - y) - \sin(x - y)) = 3L_t^{-1}(-2\sin(x - y)),$$

$$u_1(x, y, t) = -6t \sin(x - y),$$

$$u_2(x, y, t) = 3L_t^{-1}(L_x u_1 + L_y u_1),$$

$$u_2(x, y, t) = 3L_t^{-1}(2 \sin(x - y) + 2 \sin(x - y)) = 3L_t^{-1}(4 \sin(x - y)),$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{(6t)^2}{2!} \sin(x - y),$$

$$u_3(x, y, t) = 3L_t^{-1}(L_x u_2 + L_y u_2),$$

$$u_3(x, y, t) = 3L_t^{-1}\left(-2 \frac{(6t)^2}{2!} \sin(x - y)\right) = -\frac{(6t)^3}{3!} \sin(x - y),$$

olarak belirlenir. Böylece çözüm seri ve kapalı formda;

$$u(x, y, t) = \sin(x - y) \left[1 - (6t) + \frac{(6t)^2}{2!} - \frac{(6t)^3}{3!} + \dots \right]$$

$$u(x, y, t) = e^{-6t} \sin(x - y)$$

şeklinde yazılır.

3.2.7 Homojen Olmayan Çok Boyutlu Isı Denklemi

$$u_t = u_{xx} + u_{yy} + 2 \cos(x + y), \quad 0 < x, y < \pi, \quad t > 0 \quad (3.27)$$

Sınır şartları:

$$u(0, y, t) = (e^{-2t} \sin y + \cos y),$$

$$u(\pi, y, t) = -(e^{-2t} \sin y + \cos y),$$

$$u(x, 0, t) = (e^{-2t} \sin x + \cos x),$$

$$u(x, \pi, t) = -(e^{-2t} \sin x + \cos x).$$

Başlangıç şartı:

$$u(x, y, 0) = \sin(x + y) + \cos(x + y)$$

Ayrıştırma metodunu kullanarak homojen başlangıç-sınır değer problemini çözünüz [3].

Çözüm:

Operatör formda yazılan (3.27) denklemine L_t^{-1} ters operatörü uygulanır.

$$u(x, y, t) = \sin(x + y) + \cos(x + y) + 2\cos(x + y) + L_t^{-1}(L_x u + L_y u) \quad (3.28)$$

$$u(x, y, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y, t)$$

olan ayrıştırma seri formu (3.28) denkleminde yerine koyularak;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sin(x + y) + \cos(x + y) + 2t \cos(x + y) + L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) + L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right]$$

elde edilir. Buradan;

$$u_0(x, y, t) = \sin(x + y) + \cos(x + y) + 2t \cos(x + y),$$

$$u_{k+1}(x, y, t) = L_t^{-1}(L_x u_k + L_y u_k), \quad k \geq 0$$

yineleme ilişkisi belirlenir. Gerekli işlemler yapılarak;

$$L_x u_0 = -\sin(x + y) - \cos(x + y) - 2t \cos(x + y),$$

$$L_y u_0 = -\sin(x + y) - \cos(x + y) - 2t \cos(x + y),$$

$$u_1(x, y, t) = L_t^{-1}(-2\sin(x + y) - 2\cos(x + y) - 2t \cos(x + y))$$

$$= -2t \sin(x + y) - 2t \cos(x + y) - \frac{(2t)^2}{2!} \cos(x + y),$$

$$u_2(x, y, t) = L_t^{-1}(L_x u_1 + L_y u_1),$$

$$L_x u_1 = 2t \sin(x + y) + 2t \cos(x + y) + \frac{(2t)^2}{2!} \cos(x + y),$$

$$L_y u_1 = 2t \sin(x+y) + 2t \cos(x+y) + \frac{(2t)^2}{2!} \cos(x+y),$$

$$u_2(x, y, t) = L_t^{-1} \left(4t \sin(x+y) + 4t \cos(x+y) + \frac{2(2t)^2}{2!} \cos(x+y) \right),$$

$$u_2(x, y, t) = \frac{(2t)^2}{2!} \sin(x+y) + \frac{(2t)^2}{2!} \cos(x+y) + \frac{(2t)^3}{3!} \cos(x+y)$$

bileşenleri hesaplanır. Buradan çözüm;

$$u(x, y, t) = \sin(x+y) \left[1 - (2t) + \frac{(2t)^2}{2!} - \frac{(2t)^3}{3!} + \dots \right] + \cos(x+y)$$

olur ve kapalı formda

$$u(x, y, t) = e^{-2t} \sin(x+y) + \cos(x+y)$$

şeklinde ifade edilir.

3.2.8 Tek Boyutlu Dalga Denklemi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx}, \quad 0 < x < L, \quad t > 0$$

$$\text{Sınır şartları } u(0, t) = 0 \quad u(L, t) = 0, \quad t \geq 0$$

$$\text{Başlangıç şartları } u(0, t) = f(x), \quad u_t(x, 0) = g(x)$$

Çözüm:

$u(x, t)$ teldeki titreşimi ifade etmek üzere x telin yer değiştirme noktasını, t zamanı ve c telin elastikiyet sabitini gösterir. Verilen sınır şartları metalin titreşiminin sınır noktalarındaki değerlerine işaret eder. Başlangıç şartları ilk yer değiştirme ve $t = 0$ başlangıç zamanında ilk hız olarak nitelendirilir [3]. Denklem operatör formda;

$$L_t u(x, t) = c^2 L_x u(x, t)$$

olarak ifade edilir.

L_t^{-1} ve L_x^{-1} integral operatörleri sırasıyla

$$L_t^{-1}(\cdot) = \int_0^t \int_0^t (\cdot) dt dt$$

$$L_x^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$$

$$L_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} \quad \text{ve} \quad L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

şeklinde tanımlansın. Bu gösteriyor ki;

$$L_t^{-1} L_t u(x, t) = u(x, t) - t u_t(x, 0) - u(x, 0),$$

$$L_x^{-1} L_x u(x, t) = u(x, t) - x u_x(0, t) - u(0, t)$$

başlangıç şartları kullanılarak eşitliğin her iki tarafına L_t^{-1} integral operatörü uygulanırsa

$$u(x, t) = f(x) + t g(x) + c^2 L_t^{-1} (L_x u(x, t)) \quad (3.29)$$

olduğu gözlemlenir. Adomian ayrıştırma metodu sonsuz seriler tarafından, sonsuz tane bileşenin toplanmasıyla ifade edilir.

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \quad (3.30)$$

$u_n(x, y)$, $n \geq 0$ bileşenleri kolayca hesaplanabilir. (3.30) seri toplamı (3.29)

denkleminde yerine koyulursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = f(x) + t g(x) + c^2 L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right) \quad (3.31)$$

buradan $u_0(x, t)$ 'nin birkaç bileşeni tanımlanabilir.

$$u_0(x, t) = f(x) + t g(x)$$

Özyineleme (recursive) algoritması,

$$u_{k+1}(x, y) = c^2 L_t^{-1} (L_x u_k(x, t)), \quad k \geq 0$$

olur. (3.31)' deki denklemden $u_0(x,t)$, $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$,..... bileşenleri ayrı ayrı tanımlanırsa;

$$u_0(x,t) = f(x) + tg(x),$$

$$u_1(x,t) = c^2 L_t^{-1} L_x(u_0) = c^2 \left(\frac{t^2}{2!} f''(x) + \frac{t^3}{3!} g''(x) \right),$$

$$u_2(x,t) = c^2 L_t^{-1} L_x(u_1) = c^4 \left(\frac{t^4}{4!} f^{(iv)}(x) + \frac{t^5}{5!} g^{(iv)}(x) \right),$$

$$u_3(x,t) = c^2 L_t^{-1} L_x(u_2) = c^6 \left(\frac{t^6}{6!} f^{(vi)}(x) + \frac{t^7}{7!} g^{(vi)}(x) \right)$$

olduğu görülür. Kısmi diferensiyel denklemin çözümü:

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} c^{2n} \left[\frac{t^{2n}}{(2n)!} f^{(2n)}(x) + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} g^{(2n)}(x) \right]$$

şeklinde elde genelleştirilebilir.

3.2.9 Homojen Dalga Denklemi

Aşağıdaki başlangıç ve sınır değer problemini Adomian ayrıştırma metodu yardımıyla çözünüz [3]:

$$u_{tt} = u_{xx}, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$\text{Sınır şartları } u_x(0,t) = 1, \quad u_x(\pi,t) = 1$$

$$\text{Başlangıç şartları } u(x,0) = x, \quad u_t(x,0) = \cos x$$

Çözüm:

Verilen Neumann Sınır Şartları $u_t(0,t)$ ve $u_x(\pi,t)$ olmakla birlikte homojen değildir.

L_t^{-1} işlemi denklemin her iki tarafına

$$u(x,t) = x + t \cos x + L_t^{-1} (L_x u(x,t)) \quad (3.32)$$

şeklinde uygulanır. Adomian Ayrıştırma Metodu Seri Formu (3.32) denkleminde yerine yazılır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = x + t \cos x + L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right)$$

$u_n(x, t)$, $n \geq 0$ bileşenleri aşağıdaki gibi tanımlanabilir;

$$u_0(x, t) = x + t \cos x,$$

$$u_1(x, t) = L_t^{-1} (L_x(u_0)) = -\frac{1}{3!} t^3 \cos x,$$

$$u_2(x, t) = L_t^{-1} (L_x(u_1)) = \frac{1}{5!} t^5 \cos x.$$

Bileşenlerden yararlanarak;

$u(x, t)$ 'nin seri formu

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + \dots$$

$$= x + \cos x \left(t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 - \dots \right)$$

şeklinde yazılır. Kapalı formu ise

$$u(x, t) = x + \cos x \sin t$$

olur.

3.2.10 Homojen Olmayan Dalga Denklemi

Aşağıdaki homojen olmayan kısmi diferensiyel denklemi Adomian ayrıştırma metodunu kullanarak çözünüz [3].

$$u_{tt} = u_{xx} - 2, \quad 0 < x < \pi, \quad t > 0$$

$$\text{Sınır şartları} \quad u(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = \pi^2, \quad t \geq 0$$

$$\text{Başlangıç şartları} \quad u(x, 0) = x^2, \quad u_t(x, 0) = \sin x$$

Çözüm:

$$L_t u(x, t) = L_x u(x, t) - 2$$

eşitliğin her iki tarafına L_t^{-1} integral operatörünü uygularsak

$$u(x, t) = x^2 + t \sin x - t^2 + L_t^{-1} (L_x u(x, t))$$

olur. Bu denklem seri formda;

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = x^2 + t \sin x - t^2 + L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) \right) \right)$$

şeklindedir. Özyineleme (recursive) ilişkisi,

$$u_0(x, t) = x^2 + t \sin x - t^2 ,$$

$$u_{k+1}(x, t) = L_t^{-1} (L_x (u_k(x, t))) , \quad k \geq 0$$

$u(x, t)$ 'nin bileşenlerinden birkaçı tanımlanırsa,

$$u_0(x, t) = x^2 + t \sin x - t^2 ,$$

$$u_1(x, t) = L_t^{-1} (L_x (u_0)) = t^2 - \frac{1}{3!} t^3 \sin x ,$$

$$u_2(x, t) = L_t^{-1} (L_x (u_1)) = \frac{1}{5!} t^5 \sin x$$

olduğu görülür. Sonuç olarak, çözüm $u(x, t)$ serileri şeklinde ifade edilerek

$$u(x, t) = u_0(x, t) + u_1(x, t) + u_2(x, t) + = x^2 + \sin x \left(t - \frac{1}{3!} t^3 + \frac{1}{5!} t^5 - \right)$$

elde edilir ki kapalı formda da

$$u(x, t) = x^2 + \sin x \sin t$$

şeklinde yazılır.

3.2.11 Çok Boyutlu Homojen Olmayan Dalga Denklemi

$$u_{tt} = u_{xx} + u_{yy} - 4, \quad 0 < x, \quad y < \pi, \quad t > 0$$

Sınır şartları:

$$u(0, y, t) = y^2,$$

$$u(\pi, y, t) = \pi^2 + y^2,$$

$$u(x, 0, t) = x^2 + \sin x \sin t,$$

$$u(x, \pi, t) = \pi^2 + x^2 + \sin x \sin t$$

Başlangıç şartı:

$$u(x, y, 0) = x^2 + y^2$$

Homojen olmayan çok boyutlu dalga denklemini AAM ile çözünüz [3].

Çözüm:

Denklem operatör formda yazıldıktan sonra L_t^{-1} integral operatörü uygulanırsa

$$L_t u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t \sin x - 2t^2 + L_t^{-1} (L_x u + L_y u)$$

eşitliği elde edilir. Adomian Ayrıştırma Metodunun seri toplamı

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = x^2 + y^2 + t \sin x - 2t^2 + L_t^{-1} \left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) + L_y \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right)$$

olarak denklemde yerine konur. Özyineleme (recursive) algoritması;

$$u_0(x, y, t) = x^2 + y^2 + t \sin x - 2t^2,$$

$$u_{k+1}(x, y, t) = L_t^{-1} (L_x u_k - L_y u_k), \quad k \geq 0$$

şeklinde yazılır. Birkaç bileşen için gerekli hesaplamalar

$$u_0(x, y, t) = x^2 + y^2 + t \sin x - 2t^2,$$

$$u_1(x, y, t) = L_t^{-1}(L_x u_0 + L_y u_0) = 2t^2 - \frac{t^3}{3!} \sin x ,$$

$$u_2(x, y, t) = L_t^{-1}(L_x u_1 + L_y u_1) = \frac{t^5}{5!} \sin x$$

olarak yazıldıktan sonra

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + t \sin x - 2t^2 + 2t^2 - \frac{t^3}{3!} \sin x + \frac{t^5}{5!} \sin x ,$$

$$u(x, y, t) = x^2 + y^2 + \sin x \left(-\frac{t^3}{3!} \sin x + \frac{t^5}{5!} \sin x \dots \right) = x^2 + y^2 + \sin x \sin t$$

çözümüne ulaşılır.

3.2.12 Laplace Denklemi

Aşağıdaki sınır ve başlangıç şartları verilen Laplace denklemini ayrıştırma metoduyla çözünüz [3].

$$u_{xx} + u_{yy} = 0 \quad , \quad 0 < x, \quad y < \pi$$

$$u_x(0, y) = 0 ,$$

$$u_x(\pi, y) = 0 ,$$

$$u(x, 0) = \cos x ,$$

$$u(x, \pi) = \cosh \pi \cos x$$

Çözüm:

Bu denklemde karma sınır şartları kullanılmıştır. Çözüm $u(x, y)$ 'nin ve x 'e göre türevinin iki kenarında belirtilmiştir. Denklemin her iki tarafına integral operatörü uygulanır ve denklem sınır şartlarıyla

$$u(x, y) = \cos x + yg(x) - L_y^{-1} L_x u(x, y)$$

haline dönüşür. Burada;

$$g(x) = u_y(x, 0) \text{ 'dır. Ayrıştırma serisinin tanımından;}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = \cos x + yg(x) - L_y^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) \right) \right]$$

yazılabilir. Birkaç terim yazılarak çözüm,

$$u_0(x, y) = \cos x + yg(x),$$

$$u_1(x, y) = -L_y^{-1} L_x(u_0(x, y)) = \frac{1}{2!} y^2 \cos x - \frac{1}{3!} y^3 g''(x),$$

$$u_2(x, y) = -L_y^{-1} L_x(u_1(x, y)) = \frac{1}{4!} y^4 \cos x + \frac{1}{5!} y^5 g^{(iv)}(x),$$

⋮

$$u(x, y) = \cos x \left(1 + \frac{1}{2!} y^2 + \frac{1}{4!} y^4 + \dots \right) + yg(x) - \frac{1}{3!} y^3 g''(x) + \frac{1}{5!} y^5 g^{(iv)}(x) - \dots$$

şeklinde elde edilir. Bunun yanı sıra çözüm,

$$u(x, y) = \cos x \cosh y + yg(x) - \frac{1}{3!} y^3 g''(x) + \frac{1}{5!} y^5 g^{(iv)}(x) - \dots$$

olarak da ifade edilebilir. $g(x)$ fonksiyonunu tanımlamak için $u(x, \pi) = \cosh \pi \cos x$ sınır şartı kullanılsın. Buradan $g(x) = 0$ olduğu açıkça görülür ve çözüm kapalı formda,

$$u(x, y) = \cos x \cosh y$$

olur.

3.2.13 Poisson Denklemi

$$u_{xx} + u_{yy} = xy \tag{3.33}$$

İki boyutlu Poisson denklemini

$$u(0, y) = 0,$$

$$u(\pi, y) = \frac{\pi y^3}{6},$$

$$u(x, 0) = 0,$$

$$u(x, \pi) = \frac{1}{6} x \pi^3 + \sin x \sinh \pi$$

sınır şartlarını kullanarak çözünüz [80].

Çözüm:

(3.33) denklemini operatör formunda;

$$L_x u + L_y u = L(xy)$$

olur. Burada

$$L_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} \quad \text{ve} \quad L_y = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \text{ 'dir.}$$

Denklemin her iki tarafına L_y^{-1} integral operatörü uygulanarak

$$u(x, y) = \phi(x, y) - L_y^{-1}(L_x u(x, y)) + L_y^{-1}(f(x, y))$$

elde edilir. Ayırıştırma serisi, denklemde yerine yazılır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y) = \phi(x, y) + L_y^{-1}(f(x, y)) - L_y^{-1}\left(L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, y)\right)\right)$$

olur. Buradan yineleme ilişkisi,

$$u_0(x, y) = \phi(x, y) + L_y^{-1}(f(x, y)),$$

$$u_{k+1}(x, y) = -L_y^{-1}(L_x(u_k(x, y))), \quad k \geq 0$$

şeklinde belirlenir. Bileşenlerin birkaçı için gerekli işlemler yapılmıca,

$$u_0(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 + y \sin x,$$

$$u_1(x, y) = \frac{1}{6}y^3 \sin x,$$

$$u_2(x, y) = \frac{1}{120}y^5 \sin x,$$

$\vdots$

sonuçlarına ulaşılır. Böylece çözüm seri formda,

$$u(x, y) = \frac{1}{6}xy^3 + y \sin x + \frac{1}{6}y^3 \sin x + \frac{1}{120}y^5 \sin x + \dots$$

ve kapalı formda

$$u(x, y) = \frac{1}{6} xy^3 + \sin x \sinh y$$

olur.

3.2.14 Klein-Gordon Denklemi

$$u_{tt} - u_{xx} - 2u = -2 \sin x \sin t, \quad (3.34)$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = \sin x$$

Klein-Gordon kısmi integral denklemin çözümünü bulunuz [79].

Çözüm:

$2 \sin x \sin t$ teriminin gürültü terimi olduğu gösterilebilir. Bu problemi çözmek için ilk olarak lineer operatörler tanımlanır.

$$L_t(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2},$$

$$L_x(u) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

(3.34) denkleminin $t=0$ 'dan t 'ye, t' ye göre iki kez kısmi integrasyon uygulanır ve başlangıç koşulları kullanılarak,

$$u(x, t) = t \sin x + L_t^{-1}(L_x(u) + 2u) + L_t^{-1}(-2 \sin x \sin t)$$

Eğer $u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$ yazılırsa, çeşitli yinelemeler belirlenebilir;

$$u_0(x, t) = t \sin x + L_t^{-1}(-2 \sin x \sin t)$$

$$= t \sin t + \int_0^t \int_0^t (-2 \sin x \sin t) dt dt$$

$$= 2 \sin x \sin t - t \sin x$$

$$= \sin x (2 \sin t - t)$$

$u_1(x, t)$ terimi elde edilebilir,

$$\begin{aligned}
u_1(x,t) &= L_t^{-1}[L_x(u_0) + 2u_0] = \int_0^t \int_0^t [L_x(u_0) + 2u_0] dt dt \\
&= \int_0^t \int_0^t [2 \sin x \sin t - t \sin x] dt dt \\
&= -2 \sin x \sin t + 2t \sin x - \frac{t^3}{3!} \sin x \\
&= \sin x \left(-2 \sin t + 2t - \frac{t^3}{3!} \right)
\end{aligned}$$

Benzer ifadeden,

$$\begin{aligned}
u_2(x,t) &= L_t^{-1}[L_x(u_1) + 2u_1] = \int_0^t \int_0^t [L_x(u_1) + 2u_1] dt dt \\
&= 2 \sin x \sin t - 2t \sin x + \frac{t^3}{3!} \sin x - \frac{t^5}{5!} \sin x \\
&= \sin x \left(2 \sin t - 2t + \frac{t^3}{3!} - \frac{t^5}{5!} \right)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_3(x,t) &= L_t^{-1}[L_x(u_2) + 2u_2] = \int_0^t \int_0^t [L_x(u_2) + 2u_2] dt dt \\
&= -2 \sin x \sin t + 2t \sin x - \frac{t^3}{3!} \sin x + \frac{2t^5}{5!} \sin x - \frac{t^7}{7!} \sin x \\
&= \sin x \left(-2 \sin t + 2t - \frac{t^3}{3!} + \frac{2t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \right)
\end{aligned}$$

yukarıdaki terimler toplamından,

$$\phi_4(x,t) = \sum_{i=0}^3 u_i(x,t) = \sin x \left(t - \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} - \frac{t^7}{7!} \right)$$

Bu $2 \sin x \sin t$ 'nin kendini iptal eden gürültü terimi olduğunu açıklıyor. Buradan,

$$u(x,t) = \sin x \sin t$$

dahası, tümevarımla (3.34) denkleminin tam çözümü gürültü terim (noise term) ile elde edilir.

3.2.15 D'Alembert Dalga Denklemi

$$u_{tt} = c^2 u_{xx} \quad (3.35)$$

$$u(x, 0) = \phi(x),$$

$$u_t(x, 0) = \psi(x)$$

Verilen başlangıç koşullarıyla D'Alembert's dalga denklemini ayrıştırma metodu ile çözünüz [79].

Çözüm:

D'Alembert dalga denklemi başlangıç şartları kullanılarak integral denkleme dönüştürülebilir.

$$u_t(x, t) = \psi(x) + c^2 \int_0^t u_{xx} dt$$

$$u(x, t) = \phi(x) + t\psi(x) + c^2 \int_0^t \int_0^t u_{xx} dt dt$$

Sonsuz seriler düşünülürse,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t)$$

Ayrıştırma serileri olarak bilinir. (3.35) denkleminde seri çözümleri kullanılarak,

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = \phi(x) + t\psi(x) + c^2 \int_0^t \int_0^t \sum_{n=0}^{\infty} (u_n)_{xx} dt dt$$

Çeşitli yinelemeler,

$$u_0(x, t) = \phi(x) + t\psi(x),$$

$$u_1 = c^2 \int_0^t \int_0^t (u_0)_{xx} dt dt,$$

$$u_2 = c^2 \int_0^t \int_0^t (u_1)_{xx} dt dt,$$

$$u_3 = c^2 \int_0^t \int_0^t (u_2)_{xx} dt dt,$$

$$u_4 = c^2 \int_0^t \int_0^t (u_3)_{xx} dt dt ,$$

$$\vdots$$

$$u_n = c^2 \int_0^t \int_0^t (u_{n-1})_{xx} dt dt$$

şeklinde bulunur. Belirtilen integrasyonlardan çözüm özyinelemelerle (recursive) yazılabilir;

$$u_1(x, t) = c^2 \left[\frac{t^2}{2!} \phi''(x) + \frac{t^3}{3!} \psi''(x) \right] ,$$

$$u_2(x, t) = (c^2)^2 \left[\frac{t^4}{4!} \phi^{(4)}(x) + \frac{t^5}{5!} \psi^{(4)}(x) \right] ,$$

$$u_3(x, t) = (c^2)^3 \left[\frac{t^6}{6!} \phi^{(6)}(x) + \frac{t^7}{7!} \psi^{(6)}(x) \right] ,$$

$\vdots$

$$u_n(x, t) = (c^2)^n \left[\frac{t^{2n}}{(2n)!} \phi^{(2n)}(x) + \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \psi^{(2n)}(x) \right]$$

Böylece çözüm,

$$u(x, t) = u_0 + u_1 + u_2 + \dots + u_n$$

$$= \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^{2n}}{(2n)!} \phi^{(2n)}(x) \right) + \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ct)^{2n+1}}{c(2n+1)!} \psi^{(2n)}(x) \right)$$

$$= \frac{1}{2} [\phi(x+ct) + \phi(x-ct)] + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} \psi(s) ds$$

şeklinde olur.

3.3 Sistemlerin AAM ile Çözümü

3.3.1 Lineer Kısmi Diferensiyel Denklem Sistemleri

Kısmi diferensiyel denklem sistemleri operatör formda;

$$\begin{aligned} L_t u + L_x v &= g_1 \\ L_t v + L_x u &= g_2 \end{aligned} \quad (3.36)$$

şeklinde düşünülebilir [3], [64]. Başlangıç şartları,

$$\begin{aligned} u(x, 0) &= f_1(x) \\ v(x, 0) &= f_2(x) \end{aligned} \quad (3.37)$$

olsun. Burada L_x, L_t kısmi diferensiyel operatörler, g_1, g_2 homojen olmayan terimlerdir. L_t^{-1} ters operatörünü (3.36) sistemine uygular, (3.37) deki başlangıç değerlerini kullanırsak denklem:

$$u(x, t) = f_1(x) + L_t^{-1} g_1 - L_t^{-1} L_x v \quad (3.38)$$

$$v(x, t) = f_2(x) + L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} L_x u \quad (3.39)$$

dönüşür. Adomian ayrıştırma metodu $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ lineer ifadelerin sonsuz serilerin bileşenlerine ayrıştırılabileceği önerisinde bulunur. Bu seriler;

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t)$$

olarak tanımlanır. Buna ek olarak (3.38) ,(3.39)' da yerine yazılırsa;

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) &= f_1(x) + L_t^{-1} g_1 - L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \right] \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) &= f_2(x) + L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right] \end{aligned} \quad (3.40)$$

olarak ifade edilebilir. (3.40) sisteminin özyineleme (recursive) ilişkisi,

$$\begin{aligned}
 u_0(x, t) &= f_1(x) + L_t^{-1} g_1, \\
 u_{k+1}(x, t) &= -L_t^{-1} (L_x(v_k)), \quad k \geq 0 \\
 v_0(x, t) &= f_2(x) + L_t^{-1} g_2, \\
 v_{k+1}(x, t) &= -L_t^{-1} (L_x(u_k)), \quad k \geq 0
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

olur.

Örnek 3.3.1

$$u_t + v_x = 0$$

$$v_t + u_x = 0$$

Başlangıç şartları:

$$u(x, 0) = e^x, \quad v(x, 0) = e^{-x}$$

Kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini AAM ile çözünüz [3].

Çözüm:

Sistemin yineleme algoritması (3.41)' den,

$$u_0(x, t) = e^x,$$

$$u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} L_x(v_k), \quad k \geq 0$$

$$v_0(x, t) = e^{-x},$$

$$v_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} L_x(u_k), \quad k \geq 0$$

şeklinde ifade edilebilir. Buradan sistemin bileşenleri bulunursa,

$$u_1(x, t) = te^{-x},$$

$$u_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} e^x,$$

$$u_3(x, t) = \frac{t^3}{3!} e^{-x},$$

$$v_1(x, t) = -te^x ,$$

$$v_2(x, t) = \frac{t^2}{2!} e^{-x} ,$$

$$v_3(x, t) = -\frac{t^3}{3!} e^x$$

bu şekilde devam eder. Böylece çözüm,

$$u(x, t) = e^x \left[1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right] + e^{-x} \left[t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right]$$

$$v(x, t) = e^{-x} \left[1 + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^4}{4!} + \dots \right] - e^x \left[t + \frac{t^3}{3!} + \frac{t^5}{5!} + \dots \right]$$

şeklinde genelleştirilerek, analitik çözüm:

$$(u, v) = (e^x \cosh t + e^{-x} \sinh t, \quad e^{-x} \cosh t - e^x \sinh t) \text{ formunda yazılabilir.}$$

3.3.2 Lineer Olmayan Kısmi Diferansiyel Denklem Sistemleri

Lineer olmayan kısmi diferansiyel denklem sistemleri operatör formda

$$L_t u + L_x v + N_1(u, v) = g_1 ,$$

$$L_t v + L_x u + N_2(u, v) = g_2 \quad (3.42)$$

şeklinde düşünülebilir [3], [64]. Başlangıç şartları,

$$u(x, 0) = f_1(x)$$

$$v(x, 0) = f_2(x) \quad (3.43)$$

olmak üzere burada L_x, L_t kısmi diferansiyel operatörler, g_1, g_2 homojen olmayan terimlerdir. L_t^{-1} ters operatörü (3.42) sistemine uygulanır, (3.43)' deki başlangıç değerleri kullanılırsa,

$$u(x, t) = f_1(x) + L_t^{-1} g_1 - L_t^{-1} L_x v - L_t^{-1} N_1(u, v) ,$$

$$v(x, t) = f_2(x) + L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} L_x u - L_t^{-1} N_2(u, v)$$

elde edilir. Adomian ayrıştırma metodu bilinmeyen $u(x,t)$ ve $v(x,t)$ lineer fonksiyonların sonsuz serilerinin bileşenlerine ayrıştırılabilir. Bu seriler,

$$u(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t),$$

$$v(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t)$$

olarak tanımlanır. Buna ek olarak $N_1(u,v)$ ve $N_2(u,v)$ nonlinear operatörleri A_n ve B_n Adomian polinomları kullanılarak,

$$N_1(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n,$$

$$N_2(u,v) = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

şeklinde ifade edilir. Özyineleme (Recursive) ilişkisi

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x,t) &= f_1(x) + L_t^{-1} g_1 - L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} v_n \right) \right] - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n \right) \\ \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x,t) &= f_2(x) + L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} \left[L_x \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n \right) \right] - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n \right) \end{aligned} \quad (3.44)$$

olur. (3.44) denklem sisteminden

$$u_0(x,t) = f_1(x) + L_t^{-1} g_1,$$

$$u_{k+1}(x,t) = -L_t^{-1} (L_x(v_k)) - L_t^{-1} (A_k), \quad k \geq 0$$

$$v_0(x,t) = f_2(x) + L_t^{-1} g_2,$$

$$v_{k+1}(x,t) = -L_t^{-1} (L_x(u_k)) - L_t^{-1} (B_k), \quad k \geq 0$$

özyineleme (recursive) algoritması belirlenir.

Örnek 3.3.2

$$u_t + vu_x + u = 1$$

$$v_t - uv_x - v = 1$$

Başlangıç şartları;

$$u(x, 0) = e^x,$$

$$v(x, 0) = e^{-x}$$

olan kısmi türevli diferensiyel denklem sistemini AAM ile çözünüz[3].

Çözüm:

Sistemin operatör formuna L_t^{-1} integral operatörü uygulanarak,

$$u(x, t) = e^x + t - L_t^{-1}(vu_x + u),$$

$$v(x, t) = e^{-x} + t + L_t^{-1}(uv_x + v) \quad (3.45)$$

elde edilir. $u(x, t)$ ve $v(x, t)$ lineer terimleri ayrıştırma serileri ile

$$u(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t),$$

$$v(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) \quad (3.46)$$

yazılır. vu_x ve uv_x lineer olmayan terimleri sonsuz serilerin polinomları ile

$$vu_x = \sum_{n=0}^{\infty} A_n$$

$$uv_x = \sum_{n=0}^{\infty} B_n$$

ifade edilir. Burada A_n ve B_n lineer olmayan formda üretilen Adomian polinomlarıdır. (3.46) ayrıştırma serileri (3.45) denkleminde yerine yazılır ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x, t) = e^x + t - L_t^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} A_n + \sum_{n=0}^{\infty} u_n \right],$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} v_n(x, t) = f_2(x) + L_t^{-1} g_2 - L_t^{-1} \left[\sum_{n=0}^{\infty} B_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n \right]$$

olur. Özyineleme (recursive) algoritması:

$$u_0(x, t) = e^x,$$

$$u_1(x, t) = t - L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_n + u_0 \right),$$

$$u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} A_k + u_k \right), \quad k \geq 1$$

$$v_0(x, t) = e^x,$$

$$v_1(x, t) = t + L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_n + v_0 \right),$$

$$u_{k+1}(x, t) = -L_t^{-1} \left(\sum_{n=0}^{\infty} B_k + v_k \right), \quad k \geq 1$$

şeklinde tanımlanır. Lineer olmayan $v u_x$ terimleri için Adomian polinomları;

$$A_0 = v_0 u_{0_x},$$

$$A_1 = v_1 u_{0_x} + v_0 u_{1_x},$$

$$A_2 = v_2 u_{0_x} + v_1 u_{1_x} + v_0 u_{2_x},$$

$$A_3 = v_3 u_{0_x} + v_2 u_{1_x} + v_1 u_{2_x} + v_0 u_{3_x},$$

$$B_0 = u_0 v_{0_x},$$

$$B_1 = u_1 v_{0_x} + u_0 v_{1_x},$$

$$B_2 = u_2 v_{0_x} + u_1 v_{1_x} + u_0 v_{2_x},$$

$$B_3 = u_3 v_{0_x} + u_2 v_{1_x} + u_1 v_{2_x} + u_0 v_{3_x}$$

olarak verilsin. Buradan bileşenler hesaplanabilir:

$$(u_0, v_0) = (e^x, e^{-x}),$$

$$(u_1, v_1) = (-te^x, te^{-x}),$$

$$(u_2, v_2) = \left(\frac{t^2}{2!} e^x, \frac{t^2}{2!} e^{-x} \right),$$

$$(u_3, v_3) = \left(-\frac{t^3}{3!} e^x, \frac{t^3}{3!} e^{-x} \right)$$

bu şekilde devam eder. Seri formdaki sistemin çözümü,

$$(u, v) = \left(e^x \left[1 - t + \frac{t^2}{2!} - \frac{t^3}{3!} + \dots \right], e^{-x} \left[1 + t + \frac{t^2}{2!} + \frac{t^3}{3!} + \dots \right] \right)$$

ve kapalı formdaki çözümü

$$(u, v) = (e^{x-t}, e^{-x+t})$$

elde edilir.

3.4 Volterra İntegral denklemlerin AAM ile Çözümü

Adomian ayrıştırma metodu lineer ve lineer olmayan diferensiyel denklemlere, integral denklemlere, integro-diferensiyel denklemlere uygulanır. Bu metot Adomian tarafından 1990' dan daha önceki yıllarda [12] ve [13] kitaplarında ve [75]'de ortaya konmuştur. Bu metot özellikle pertürbasyon tekniğine benzer bir kuvvet serisi metodudur. Metodu seri formdaki $u(x)$ ifadesi ile

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3.47)$$

şeklinde gösterilebilir [79]. $u_0(x)$ terimi integral işareti dışına yazılırsa, integral denklem,

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x, t) u(t) dt \quad (3.48)$$

olur ve böylece

$$u_0(x) = f(x)$$

olduğu açıkça görülür. (3.47) denklemini (3.48) 'te yerine yazarsak,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x K(x,t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u(t) \right\} dt$$

Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$ bileşenlerini özyineleme (recursive) tarzında tanımlanabilir.

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_1(t) dt,$$

$\vdots$

$$u_n(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_{n-1}(t) dt$$

Bu denklem kümesi kısaca özyineleme (recursive) düzeninde yazılabilir.

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_0^x K(x,t) u_n(x) dt, \quad n \geq 0$$

Burada kayda değer olan birçok bileşen için çekirdeği integre etmek mümkün olmayabilir. Bu durumda, $u(x)$ fonksiyonuna yakın kesin bir noktada seri kesilir. Ele alınması gereken başka bir nokta daha vardır; bu da sonsuz serilerin çözümünün yakınsaklığıdır. Bu problem bu alanda önceki araştırmacılar tarafından ele alınmıştır. Bazı örneklerle bu teknik gösterilebilir.

3.4.1 İkinci Tür Volterra İntegral Denklemi

$$u(x) = x + \int_0^x (x-t) u(t) dt$$

İkinci tür integral denklemini ayrıştırma metodu ile çözünüz [79].

Çözüm:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

Seri formunda çözüm düşünölsün. Bu seri verilen denklemde yerine yazılırsa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = x + \int_0^x (t-x) \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

olur. Farklı terimleri aşağıdaki şekilde ayrılabilir,

$$u_0(x) = x,$$

$$u_1(x) = \int_0^x (t-x) u_0(t) dt$$

$$= \int_0^x (t-x) t dt = -\frac{x^3}{3!},$$

$$u_2(x) = \int_0^x (t-x) u_1(t) dt$$

$$= \int_0^x (t-x) \left(-\frac{t^3}{3!} \right) dt = \frac{x^5}{5!},$$

Bu şekilde devam edilerek

$$u(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x$$

bulunur. Verilen integral denklemin kapalı formdaki çözümünün serisi elde edilir. Oran

(ratio) testi ile $u_n(x) = (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$, $|x| < \infty$ olduğu kolayca görülebilir. Bunun

anlamı sonlu aralıkta x 'in bütün değerleri için seriler yakınsaktır. İntegral denklemin

Laplace dönüşümü alınarak, $\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{1}{s^2+1}$ olduğu görülür ve böylece $u(x) = \sin x$

olur.

3.4.2 Homojen Olmayan Volterra İntegral Denklemin

$$u(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} u(t) dt$$

İkinci tür Volterra integral denklemini ayrıştırma metodu yardımıyla çözümler [79].

Çözüm:

Denklemin çözümü $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ olarak düşünölsün. Böylece denklem yerine koyulursa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_0^x e^{x-t} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) dt$$

olur. Dolayısıyla benzer terimler,

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} f(t) dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_0^x e^{x-t} u_1(t) dt$$

$$= \lambda \int_0^x e^{x-t} \left\{ \lambda \int_0^t e^{t-t_1} f(t_1) dt_1 \right\} dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^x f(t_1) dt_1 \int_{t_1}^x e^{x-t} e^{t-t_1} dt$$

$$= \lambda^2 \int_0^x e^{x-t_1} (x-t_1) f(t_1) dt_1$$

$$= \lambda^2 \int_0^x e^{x-t} (x-t) f(t) dt$$

şeklinde elde edilir. Burada

$$u_2(x) = \lambda^2 \int_0^x \int_0^x e^{x-t} f(t) dt dt = \lambda^2 \int_0^x (x-t) e^{x-t} f(t) dt$$

yazılabilir. Aynı şekilde,

$$= \lambda \int_0^x e^{x-t} u_2(t) f(t) dt$$

$$= \lambda^3 \int_0^x \frac{(x-t)^2}{2!} e^{x-t} f(t) dt$$

olur. Böylece ayrıştırma serileri;

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots,$$

$$\begin{aligned}
&= f(x) + \lambda \int_0^x \left\{ 1 + \lambda(x-t) + \lambda^2 \frac{(x-t)^2}{2!} + \dots \right\} e^{x-t} f(t) dt \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{\lambda(x-t)} e^{x-t} f(t) dt \\
&= f(x) + \lambda \int_0^x e^{(1+\lambda)(x-t)} f(t) dt
\end{aligned}$$

olarak belirtilir.

3.4.3 Lineer Olmayan Volterra İntegral Denklem

$$u(x) = x + \frac{x^2}{5} - \int_0^x t u^3(t) dt$$

Lineer olmayan Volterra tipi integral denklemin çözümünü bulunuz [79].

Çözüm:

Bu integral denklemin çözümü $u(x) = x$ olarak gözlemlenebilir. Çünkü

$$\int_0^x t(t^3) dt = \frac{x^5}{5} \text{ ve buradan } u(x) = x + \frac{x^2}{5} - \frac{x^5}{5} = x \text{ olur. Bu modifiye ayrıştırma}$$

metoduyla kolayca yapılabilir. Bu metotta çözüm $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ serileriyle ifade

edilir ve $f(u) = u^3$, $f'(u) = 3u^2$ ve $f''(u) = 6u$, $f'''(u) = 6$. Burada üçüncü mertebeden büyük türevler sıfırdır.

$u = u_0$ civarında Taylor seri açılımı,

$$\begin{aligned}
f(u) &= f(u_0) + (u_1 + u_2 + u_3 + \dots) f'(u_0) + \frac{1}{2!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^2 f''(u_0) \\
&\quad + \frac{1}{3!} (u_1 + u_2 + u_3 + \dots)^3 f'''(u_0) + \dots
\end{aligned}$$

olarak yazılabilir. Burada ayrıştırma serileri,

$$A_0 = f(u_0) = u_0^3,$$

$$A_1 = u_1 f'(u_0) = 3u_0^2 u_1,$$

$$A_2 = u_2 f'(u_0) + \frac{1}{2} u_1^2 f''(u_0) = u_2 (3u_0^2) + u_1^2 (3u_0),$$

$$A_3 = u_3 f'(u_0) + u_1 u_2 f''(u_0) + \frac{1}{3} u_1^3 f'''(u_0) = u_3 (3u_0^2) + u_1 u_2 6(u_0) + u_1^3$$

⋮

şeklinde tanımlanır. $u_0(x) = x$ olduğu düşünölsün.

$$u_0(x) = x,$$

$$u_1(x) = \frac{x^5}{5} - \int_0^x t A_0(t) dt = \frac{x^5}{5} - \int_0^x t(t^3) dt = \frac{x^5}{5} - \frac{x^5}{5} = 0$$

$$u_2(x) = - \int_0^x t A_1(t) dt = 0 \quad \text{çünkü} \quad u_1(x) = 0.$$

Benzer şekilde, $n \geq 0$ için $u_n(x) = 0$ dır. Böylece çözüm $u(x) = x$ olur. Fakat genel

prosedüre göre, eğer sıfırıncı bileşen $u_0(x) = x + \frac{x^5}{5}$ olarak belirlenirse, ilk bileşen

$$u_1(x) = - \int_0^x t A_0(t) dt = - \int_0^x t \left(t + \frac{t^5}{5} \right)^3 dt = - \frac{x^5}{5} - \frac{x^9}{15} - \frac{3x^{13}}{325} - \frac{x^{17}}{2125}$$

ikinci bileşen,

$$u_2(x) = - \int_0^x t A_1(t) dt = \int_0^x 3t \left(t + \frac{t^5}{5} \right)^2 \left(\frac{x^5}{5} + \frac{x^9}{15} + \frac{3x^{13}}{325} + \frac{x^{17}}{2125} \right) dt$$

olur. $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bileşenlerinin $\frac{x^5}{5}$ ve $-\frac{x^5}{5}$ güröltü terimlerinin (noise terms)

iptal edilebildiğı kolayca gözlenebilir. $u_0(x)$ 'ın diğeri terimleri denklemdede sağladığı doğrulanır ve $u(x) = x$ tam çözüm olur.

3.4.4 Lineer olmayan Volterra integral denkleminin MAAM ve AAM ile Çözümü

$$u(x) = \sin x + \frac{1}{8} \sin(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \int_0^x u^2(t) dt$$

Lineer olmayan Volterra integral denklemini standart veya modifiye ayrışım metodu kullanarak çözünüz. Tam çözümü veya seri çözümünün birkaç terimini bulunuz [79].

Çözüm:

Kontrol edilerek $u(x) = \sin x$ tam çözümü kolayca görülebilir. Modifiye ayrışım metoduyla sonuç sağlatılabilir. Bu sebepten $f(x) = \sin x + \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4}$, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bileşenlerine ayrılabilir. Burada $u_0(x) = \sin x$ olarak belirlenir. Sonuç olarak, ilk ayrıştırma bileşeni;

$$u_1(x) = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \int_0^x A_0(t) dt$$

ile tanımlanır. Burada, $A_0(x) = u_0^2 = \sin^2 x$ olur. Böylece

$$u_1(x) = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \int_0^x \sin^2 t dt = \frac{1}{8}\sin(2x) - \frac{x}{4} + \left(\frac{x}{4} - \frac{1}{8}\sin(2x) \right) = 0$$

$k \geq 1$ için $u_k(x) = 0$ ile diğer bileşenler tanımlanır. Tam çözüm $u(x) = \sin x$ olur.

3.4.5 Homojen olmayan Volterra integral denkleminin MAAM ve AAM ile Çözümü

$$u(x) = \tan x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + \int_0^x \frac{dt}{1+u^2(t)}$$

Lineer olmayan Volterra integral denklemini standart veya modifiye ayrışım metodu kullanarak çözüünüz. Tam çözümü veya seri çözümünün birkaç terimini bulunuz [79].

Çözüm:

Kontrol edilerek $u(x) = \tan x$ tam çözümü kolayca görülebilir. Modifiye ayrışım metotla sonuç sağlatılabilir. Bunu sonuçlandırmak için $f(x) = \tan x - \frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2}$, $u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bileşenlerine ayrılabilir. Burada $u_0(x) = \tan x$ olarak belirlenir. Sonuç olarak, ilk ayrışım bileşeni

$$\begin{aligned} u_1(x) &= -\frac{1}{4}\sin(2x) - \frac{x}{2} + \int_0^x A_0(t) dt, \\ &= -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2} + \int_0^x \frac{1}{1+\tan^2 t} dt \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2} + \int_0^x \cos^2 t \, dt$$

$$= -\frac{1}{4}\sin 2x - \frac{x}{2} + \frac{1}{4}\sin 2x + \frac{x}{2} = 0$$

$k \geq 1$ için $u_k(x) = 0$ ile diğer bileşenler tanımlanır. Tam çözüm $u(x) = \tan x$ olur.

3.4.6 Volterra İntegral Denklem

$$u(x) = \int_0^x (x + u^2) dx = \frac{x^2}{2} + \int_0^x u^2(t) dt$$

İntegral denklemini ayrıştırma metoduyla çözünüz [79].

Çözüm:

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt$$

Ayrıştırma metoduyla seri formda denklem yazılabilir;

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \frac{x^2}{2} + \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty} A_n(t) dt$$

Çözüm ayrıştırılabilir,

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2},$$

$$u_1(x) = \int_0^x A_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \int_0^x A_1(t) dt,$$

$$\dots = \dots$$

$$u_n(x) = \int_0^x A_{n-1}(t) dt$$

$f(u) = u^2$ olduğu bilinerek $f'(u) = 2u$ ve $f''(u) = 2$ yazılabilir. Yüksek mertebeden bütün türevler sıfır olabilir. Böylece,

$$f(u_0) = u_0^2 = \frac{x^4}{4},$$

$$f'(u_0) = 2u_0 = x^2 ,$$

$$f''(u_0) = 2$$

elde edilir. Bu bilgilerden,

$$A_0(x) = \frac{x^4}{4} ,$$

$$A_1(x) = u_1 x^2 ,$$

$$A_2(x) = u_2 x^2 + u_1^2 ,$$

$$A_3(x) = u_3 x^2 + 2u_1 u_2$$

Böylece serilerin farklı bileşenleri;

$$u_0(x) = \frac{x^2}{2} ,$$

$$u_1(x) = \int_0^x A_0(t) dt = \int_0^x \frac{t^4}{4} dt = \frac{x^5}{20} ,$$

$$u_2(x) = \int_0^x A_1(t) dt = \int_0^x u_1(t) dt = \int_0^x u_1(t) t^2 dt$$

$$= \int_0^x \left(\frac{t^5}{2} \right) t^2 dt = \frac{x^8}{160} ,$$

$$u_3 = \int_0^x A_2(t) dt = \int_0^x \{u_2(t) t^2 + u_1^2(t)\} dt$$

$$= \int_0^x \left\{ \left(\frac{t^8}{160} \right) t^2 + \frac{t^{10}}{400} \right\} dt = \frac{7x^{11}}{8800} ,$$

şeklinde elde edilebilir. Yukarıdaki çözüm,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + u_3(x) + \dots ,$$

$$= \frac{x^2}{2} + \frac{x^5}{20} + \frac{x^8}{160} + \frac{7x^{11}}{8800} + \dots$$

olur.

3.4.7 Sarkaç Salınımı Problemi

$$u''(x) + 2u'(x) + 2\sin u = 0$$

Başlangıç değer probleminin çözümünü $u(0)=1$, $u'(0)=0$ başlangıç şartları ile ayrıştırma metoduna kullanarak bulunuz. Bu problem pratikte sarkacın salınımı problemidir [79].

Çözüm:

Verilen başlangıç değer problemi Volterra integral denklemine dönüştürülebilir,

$$u(x) = 1 + 2x - 2 \int_0^x u(t) dt - \int_0^x (x-t) \sin u(t) dt$$

Çözüm, $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ seri formunda düşünölsün ve $f(u) = \sin u$ olsun.

$f(u) = \sin u$, $u = u_0$ etrafında Taylor serisine açılırsa,

$$\begin{aligned} f(u) &= \sin u_0 + \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \cos u_0 - \frac{1}{2} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)^2 \sin u_0 - \frac{1}{6} \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)^3 \cos u_0 + \dots \\ &= A_0 + A_1 + A_2 + A_3 + \dots \end{aligned}$$

yazılabilir. Burada,

$$A_0(x) = \sin u_0,$$

$$A_1(x) = u_1(x) \cos u_0,$$

$$A_2 = u_2(x) \cos u_0 - \frac{1}{2} u_1^2 \sin u_0,$$

$$A_3 = u_3(x) \cos u_0 - u_1(x) u_2(x) \sin u_0 - \frac{1}{6} u_1^3 \cos u_0,$$

$\vdots$

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = 2x - 2 \int_0^x u_0(t) dt - 2 \int_0^x (x-t) A_0(t) dt$$

$$= 2x - 2 \int_0^x (1) dt - 2 \int_0^x (x-t) \sin 1 dt$$

$$= 2x - 2x - x^2 \sin 1 = -x^2 (\sin 1) ,$$

$$u_2(x) = -2 \int_0^x u_1(t) dt - 2 \int_0^x (x-t) A_1(t) dt$$

$$= 2 \sin 1 \int_0^x t^2 dt + 2 \sin 1 \cos 1 \int_0^x (x-t) t^2 dt$$

$$= \frac{2}{3} (\sin 1) x^3 + (\sin 2) \int_0^x (x-t) t^2 dt$$

$$= \frac{2}{3} (\sin 1) x^3 + \frac{1}{12} (\sin 2) x^4$$

olur. Böylece, ikinci mertebeye kadar ayrıştırmanın çözümü,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) = 1 - (\sin 1)x^2 + \frac{2}{3} (\sin 1)x^3 + \frac{1}{12} (\sin 2)x^4$$

şeklinde bulunur. Burada, başlangıç koşullarıyla diferensiyel denklem kullanılarak bu problem ayrıştırma metoduyla şu şekilde çözülebilir:

Ayrıştırma türev mertebesine eşitlenerek

$$u_0'' + 2u_0' = 0 ,$$

$$u_1'' + 2u_1' = -2A_0 ,$$

$$u_2'' + 2u_2' = -2A_1 ,$$

$$u_3'' + 2u_3' = -2A_2 ,$$

$$\vdots$$

$$u_n'' + 2u_n' = -2A_{n-1}$$

yazılır. Başlangıç koşullarıyla,

$$u_0(0) = 1 , \quad u_0'(0) = 0 ,$$

$$u_1(0) = 0 , \quad u_1'(0) = 0 ,$$

$$u_2(0) = 0, \quad u_2' = 0,$$

$$u_3(0) = 0, \quad u_3' = 0,$$

$\vdots$

$$u_n(0) = 0, \quad u_n' = 0,$$

elde edilir. Başlangıç değer probleminin çözümü,

$$u_0(x) = 1,$$

$$u_1(x) = \frac{\sin 1}{2} (1 - 2x - e^{-2x}),$$

$$u_2(x) = \frac{\sin 2}{8} (3 - 4x + 2x^2 - (3 + 2x)e^{-2x})$$

olur. Böylece, ayrıştırma terimlerinin ikinci mertebeye kadar çözümü,

$$u(x) = u_0(x) + u_1(x) + u_2(x)$$

$$= 1 + \left(\frac{\sin 1}{2} \right) (1 - 2x - e^{-2x}) + \frac{\sin 2}{8} [3 - 4x + 2x^2 - (3 + 2x)e^{-2x}]$$

şeklinde verilir.

3.5 Fredholm İntegral Denklemlerin AAM ile Çözümü

Ayrıştırma metodu Adomian tarafından [13] sunulmuştur. Metot Neumann serileriyle çok benzerdir. Ayrıştırma metodunun lineer ve lineer olmayan diferensiyel ve integral denklemlerin geniş bir kısmı için verimli ve güvenilir olduğu kanıtlanmıştır. Neumann serileri metodu gibi bu metot seri formda çözümler sağlar ve bu metot adi ve kısmi diferensiyel denklemlere uygulanabilir. Son zamanlarda integral denklemler için kullanıldığı literatür taramalarında bulunmuştur. Sonsuz serilerin düzgün yakınsaklık kavramı Adomian tarafından [12] ve Adomian ve Rach ile [75] lineer problemler ele alınmıştır. Cherruault et al [5] ve Cherruault ve Adomian [6] ise lineer olmayan problemleri genişletmiştir [79]. Ayrıştırma metoduyla lineer integral denklemlerin çözümü,

$$u(x) = f(x) + \int_a^b K(x,t)u(t)dt \quad (3.49)$$

şeklinde ifade edilebilir. Düzenli pertürbasyon serilerine benzer formda seriler [81].

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) \quad (3.50)$$

şeklinde tanımlanır. (3.50) ayrıştırma denklemini yerine yazılarak (3.49) denkleminin her iki tarafı

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = f(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right\} dt \quad (3.51)$$

olarak ifade edilir. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun $u_0(x), u_1(x), u_2(x), u_3(x), \dots, u_n(x), \dots$ bileşenlerini özyineleme (recursive) tarzında tanımlanarak,

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_1(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt,$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_1(t) dt,$$

$\vdots$

$$u_n(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_{n-1}(t) dt$$

elde edilir. Burada perturbasyon tekniğine benzer ana düşünce $f(x)$ bilinmeyen fonksiyonu ile sıfıncı ayrıştırma serisi olan $u_0(x)$ ile tanımlanmaktadır. Öncelikle $u_0(x)$ bilinir, sonra $u_1(x), u_2(x), \dots$ başarıyla belirlenir ve devam eder. Öz yineleme (recursive) şeması

$$u_0(x) = f(x),$$

$$u_{n+1}(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_n(x) dt, \quad n \geq 1$$

verilir. Önce bileşenler tanımlanır, $u(x)$ çözümü (3.51) serileri kullanılarak elde edilebilir. Bazı problemler için seriler kapalı formda çözümleri verirler fakat diğer

problemler için serilerde $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ gibi kesin terimde seriler kesilerek birkaç terim belirlenir. Sonsuz serilerin düzgün yakınsaklık özelliği olduğu için maksimum kesinliğe ulaşılabilir. Bazen $f(x)$ terimini ayrıştırmak için $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ kullanılabilir öyle ki,

$$u_0(x) = f_1(x),$$

$$u_1(x) = f_2(x) + \lambda \int_a^b K(x,t) u_0(t) dt$$

$$u_2(x) = \lambda \int_a^b K(x,t) u_1(t) dt$$

⋮

Bu ayrıştırmaya; modifiye ayrıştırma metodu denir.

3.5.1 Fredholm İntegral Denklem

$$u(x) = e^x - 1 + \int_0^1 tu(t) dt$$

Fredholm integral denklemini ayrıştırma metodu ile çözünüz [79].

Çözüm:

Burada ayrıştırma metodu kullanılırsa

$$u_0(x) = e^x - 1,$$

$$u_1(x) = \int_0^1 tu_0(t) dt = \int_0^1 t(e^t - 1) dt = \frac{1}{2},$$

$$u_2(x) = \int_0^1 tu_1(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{2} t dt = \frac{1}{4},$$

$$u_3(x) = \int_0^1 tu_2(t) dt = \int_0^1 \frac{1}{4} t dt = \frac{1}{8}$$

⋮

Böylece çözüm,

$$u(x) = e^x - 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = e^x$$

olur. Modifiye ayrıştırma metoduyla

$$u_0(x) = e^x ,$$

$$u_1(x) = -1 + \int_0^1 tu_0(t)dt = \int_0^1 te^t dt = 0 ,$$

$$u_2(x) = \int_0^1 tu_1(t)dt = 0 ,$$

$$u_n(x) = 0$$

bileşenleri yazılabilir. $u(x) = e^x$ çözümdür. Doğrudan hesaplamayla $u(x) = e^x - 1 + \alpha$ elde edilir. Burada $\alpha = \int_0^1 tu(t)dt$ dir. $u(x)$ 'in değeri integral işareti altında kullanılarak, $\alpha = \int_0^1 t(e^t - 1 + \alpha)dt = \frac{1}{2}(1 + \alpha)$ olur. Bu yüzden $\alpha = 1$ dir. Böylece $u(x) = e^x$ çözümü ayrıştırma metoduyla aynıdır.

3.5.2 Homojen Olmayan Fredholm İntegral Denklemi İçin AAM ve MAAM Çözümü

$$u(x) = \cos^{-1} x - x + \int_0^1 xu(t)dt$$

Homojen olmayan Fredholm integral denklemi için AAM ve MAAM karşılaştırınız [79].

Çözüm:

- **Standart Adomian Metodu ile Çözüm:**

Özyineleme (recursive) ilişkisinden,

$$u_0 = \cos^{-1} x - x ,$$

$$u_{k+1} = x \int_0^1 u_k(t)dt, \quad k \geq 0$$

yazılabilir. Buna göre,

$$u_0 = \cos^{-1} x - x ,$$

$$u_1 = x \int_0^1 u_0(t)dt = \frac{1}{2}x ,$$

$$u_2 = x \int_0^1 u_1(t)dt = \frac{1}{4}x ,$$

$$u_3 = x \int_0^1 u_2(t) dt = \frac{1}{8}x$$

$$\vdots$$

olur. Buradan seri çözüm,

$$u(x) = \cos^{-1} x - x + \frac{1}{2}x \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots \right)$$

olarak elde edilir. Bu çözüm kapalı formda,

$$u(x) = \cos^{-1} x$$

şeklinde elde edilir ki, geometrik dizi değerlendirmesinden kolayca görülebilir. Burada önemli olan nokta denklemin homojen olmayan integral denklem olmasına rağmen u_0 ve u_1 terimlerinde gürültü terimi (noise term) elde edilmemesidir.

- **Modifiye Ayrıştırma Metoduyla Çözüm:**

İlk olarak f fonksiyonu

$$f_1 = \cos^{-1} x ,$$

$$f_2 = -x$$

şeklinde iki parçaya bölünür. Özyineleme (recursive) ilişkisi için $u_0 = f_1$ olarak seçilir.

$$u_0 = \cos^{-1} x ,$$

$$u_1 = -x + x \int_0^1 u_0(t) dt ,$$

$$u_{k+2} = x \int_0^1 u_{k+1}(t) dt, \quad k \geq 0.$$

Sonuç olarak,

$$u_0 = \cos^{-1} x ,$$

$$u_1 = -x + x \int_0^1 u_0(t) dt = 0 ,$$

$$u_{k+2} = 0, \quad k \geq 0.$$

yazılabilir ve çözüm kapalı formda, $u = \cos^{-1} x$ şeklinde elde edilir. Burada önemli olan standart AAM ile daha fazla iterasyonla bulunan sonuca MAAM ile tam çözümün sadece iki iterasyonla ulaşılabilmesidir.

3.5.3 Dejenere Çekirdek ile AAM' nin Fredholm İntegral Denkleme Uygulaması

Dejenere çekirdek methoduyla, aşağıdaki lineer olmayan Fredholm tipi integral denklemini çözün ve sonucu ayrıştırma methoduyla sağlama yapın [79].

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2} \int_0^1 xtu^2(t)dt$$

Çözüm:

- **Dejenere çekirdek metodu:**

$$\alpha = \int_0^1 tu^2(t)dt$$

burada α sabittir, verilen integral denklem,

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{2}x\alpha$$

yazılabilir. Fakat

$$\alpha = \int_0^1 t \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\alpha \right)^2 t^2 dt = \frac{1}{4} \left(\frac{7}{8} + \frac{1}{2}\alpha \right)^2$$

şimdi bu quadratik denklemin çözümünden $\alpha = \frac{1}{4}, \frac{49}{4}$ elde edilir. Verilen integral

denklemin iki gerçek çözümünden,

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{1}{8}x = x \quad \text{ve} \quad u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{x}{2} \frac{49}{4} = 7x \quad \text{elde edilir.}$$

- **Ayrışım metodu:**

Bu metotta $f(u) = u^2$ lineer olmayan terimler için Adomian polinomları,

$$A_0(x) = u_0^2,$$

$$A_1(x) = 2u_0u_1,$$

$$A_2(x) = 2u_0u_2 + u_1^2 ,$$

$$A_3(x) = 2u_0u_3 + 2u_1u_2 ,$$

⋮

elde edilir. Burada farklı bileşenler $f(u) = u^2$ ile hesaplanabilir, $f'(u) = 2u$,
 $f''(u) = 2$, $f'''(u) = 0$. Özyineleme (recursive) algoritmasıyla,

$$u_0(x) = \frac{7}{8}x ,$$

$$u_1(x) = \frac{x}{2} \int_0^1 t A_0(t) dt = \frac{49}{512}x ,$$

$$u_2(x) = \frac{x}{2} \int_0^1 t A_1(t) dt = \frac{343}{16384}x$$

olur. Çözüm seri formda yazılırsa,

$$u(x) = \frac{7}{8}x + \frac{49}{512}x + \frac{343}{16384}x + \approx x .$$

Bu örnekte tam çözüm elde edilemez; bu yüzden serinin birkaç terim çözüme yaklaşmak için kullanılabilir. $u(x) = x$ ve $u(x) = 7x$ çözümleri standart AAM ile elde edilir. Böylece, verilen integral denklem tek bir çözüme sahip değildir.

3.6 Volterra İntegro-Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü

Bu bölümde Volterra İntegral denklemleri çözmek için ayrıştırma metodu ve modifiye ayrıştırma metodundan yararlanarak bu metodun güvenilir ve etkili olduğu görülecektir. Öncelikle standart formda bir Volterra İntegro diferensiyel denklem ele alınsın [79].

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^x K(x,t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1) \quad (3.52)$$

Burada $u^{(n)}$ başlangıç şartları tanımlanan x ve b_k sabitlerine göre $u(x)$ 'in n . mertebeden türevidir. $u(x)$ için aranan ifadeler (3.52) denkleminde türetilebilir. (3.52) denkleminin her iki tarafı 0'dan x 'e integre edilebilir. Sonuç olarak,

$$u(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u(t) dt \right) \quad (3.53)$$

elde edilir. Burada $\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k$ başlangıç şartları kullanılarak elde edilir ve L^{-1} n – katlı integral operatörüdür. (3.53) denkleminde

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

seri çözümü uygulanırsa denklem,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(t) \right) dt \right)$$

olur. Bu denklem açıkça,

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u_0(t) dt \right) + L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u_1(t) dt \right) + \dots \end{aligned} \quad (3.54)$$

yazılır. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun $u_0(x), u_1(x), \dots$ bileşenleri özyineleme (recursive) şeklinde tanımlanarak

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)),$$

$$u_1(x) = L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u_0(t) dt \right),$$

$$u_2(x) = L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u_1(t) dt \right),$$

$$u_3(x) = L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u_2(t) dt \right)$$

⋮

devam ettirilebilir. Böylece; bileşenler elde edilir. Yukarıdaki denklemler özyineleme (recursive) şeklinde yazılarak,

$$u_0(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)),$$

$$u_{n+1}(x) = L^{-1} \left(\int_0^x K(x,t) u_n(t) dt \right), \quad n \geq 0$$

olarak tanımlanır. (3.54) denkleminde $u_0(x), u_1(x), \dots$ bileşenleri tanımlanarak çözüm seri formda elde edilir ve kapalı çözümü yazılabilir [82].

Örnek 3.6

$$u''(x) = x + \int_0^x (x-t)u(t)dt, \quad u(0) = 0; \quad u'(0) = 1$$

Volterra integro-diferensiyel denklemini ayrıştırma metodunu kullanarak çözünüz. Sonucu Laplace dönüşüm metoduyla sağlayınız [79].

Çözüm:

Çift katlı $L^{-1}(\cdot) = \int_0^x \int_0^x (\cdot) dx dx$ integral operatörü her iki tarafa uygulanarak verilen lineer şartlar kullanılırsa

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)u(t)dt \right)$$

denklemini elde edilir. Ayrıştırma ifadeleri,

$$u_0(x) = x + \frac{x^3}{3!},$$

$$u_1(x) = L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)u_0(t)dt \right) = \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!},$$

$$u_2(x) = L^{-1} \left(\int_0^x (x-t)u_1(t)dt \right) = \frac{x^9}{9!} + \frac{x^{11}}{11!}$$

olur ve buradan çözüm,

$$u(x) = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \dots$$

şeklinde yazılabilir ve $u(x) = \sinh x$ kapalı formdaki çözüm elde edilir. Bulunan sonucun sağlaması konvolüsyon sebebiyle Laplace dönüşüm metodundan yararlanarak kolayca yapılabilir.

$$\mathcal{L}\{u(x)\} = \frac{1}{s^2 - 1} \text{ olur ve ters dönüşüm alınarak } u(x) = \sinh x \text{ elde edilir.}$$

3.7 Fredholm İntegro Diferensiyel Denklemlerin AAM ile Çözümü

Standart formda Fredholm integro diferensiyel denklemi ele alınsın [79].

$$u^{(n)} = f(x) + \int_0^1 K(x, t)u(t)dt, \quad u^{(k)}(0) = b_k, \quad 0 \leq k \leq (n-1) \quad (3.55)$$

(3.55) denkleminde $K(x, t) = g(x)h(t)$ yerine yazılırsa

$$u^{(n)}(x) = f(x) + g(x) \int_0^1 h(t)u(t)dt \quad (3.56)$$

elde edilir. Burada (3.56) denklemi operatör formda

$$Lu(x) = f(x) + g(x) \int_0^1 h(t)u(t)dt \quad (3.57)$$

şeklinde yazılabilir. Burada $L = \frac{d^n}{dx^n}$ diferensiyel operatör olarak verilir. L terslenebilir bir operatördür bu yüzden L^{-1} integral operatörü n katlı integral operatördür ve her integral için 0'dan x 'e tanımlanan integraller düşünülebilir. (3.57) denkleminin her iki tarafına L^{-1} integral operatörü uygulanır ve

$$u(x) = b_0 + b_1x + \frac{1}{2!}b_2x^2 + \dots + \frac{1}{(n-1)!}b_{n-1}x^{n-1} + L^{-1}\left(f(x)\right) + \left(\int_0^1 h(t)u(t)dt\right)L^{-1}\left(g(x)\right) \quad (3.58)$$

elde edilir. Başka bir ifadeyle, (3.58) denklemi 0'dan 1'e n kere integre edilmiş ve integrasyonun her basamağında başlangıç şartları kullanılmıştır. Ayrıştırma metodunda $u(x)$ çözümü,

$$u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$$

şeklinde seri formda tanımlanır. Bu seri çözümü (3.58)'e uygulanarak denkleminin her iki tarafında yerine konulursa,

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) + \left(\int_0^1 h(t) u(t) dt \right) L^{-1}(g(x))$$

olur. Bu denklem açıkça,

$$\begin{aligned} u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)) \\ &+ \left(\int_0^1 h(t) u_0(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) + \left(\int_0^1 h(t) u_1(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) + \dots \end{aligned}$$

yazılır. Bilinmeyen $u(x)$ fonksiyonunun $u_0(x), u_1(x), \dots$ bileşenleri özyineleme (recursive) şeklinde tanımlanarak,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)), \\ u_1(x) &= \left(\int_0^1 h(t) u_0(t) dt \right) L^{-1}(g(x)), \\ u_2(x) &= \left(\int_0^1 h(t) u_1(t) dt \right) L^{-1}(g(x)) \\ &\vdots \end{aligned}$$

bileşenler elde edilir. Yukarıdaki denklemler özyineleme (recursive) şeklinde yazılarak,

$$\begin{aligned} u_0(x) &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} b_k x^k + L^{-1}(f(x)), \\ u_{n+1}(x) &= \left(\int_0^1 h(t) u(t) dt \right) L^{-1}(g(x)), \quad n \geq 0 \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanır. Bu denklemden $u_0(x), u_1(x), \dots$ bileşenleri tanımlanarak denklemin çözümü seri formda elde edilir. Seri çözümleri yakınsak olarak ifade edilir ve bazen $u(x)$ için tam ifadeler de ulaşılabilir [82].

Örnek 3.7

$$u'''(x) = \sin x - x - \int_0^{\pi/2} xtu'(t)dt, \quad u(0)=1, \quad u'(0)=0, \quad u''(0)=-1 \quad (3.59)$$

Fredholm integro diferensiyel denklemini ayrıştırma metodunu kullanarak çözünüz [79].

Çözüm:

(3.59) denkleminin her iki tarafı 0'dan $\frac{\pi}{2}$ 'ye üç kere integre edilir ve başlangıç şartları kullanılırsa,

$$u(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!} \int_0^{\pi/2} tu'(t)dt \quad (3.60)$$

denklemini elde edilir. $u(x) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)$ seri denklemini (3.60) denkleminin her iki tarafında yerine yazılırsa

$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!} \int_0^{\pi/2} t \left(\sum_{n=0}^{\infty} u'_n(x) \right) dt$$

elde edilir. Bu denklem açıkça,

$$u_0(x) + u_1(x) + u_2(x) + \dots = \cos x - \frac{x^4}{4!} - \frac{x^4}{4!} \left(\int_0^{\pi/2} tu'_0(t)dt \right) \\ - \frac{x^4}{4!} \left(\int_0^{\pi/2} tu'_1(t)dt \right) - \frac{x^4}{4!} \left(\int_0^{\pi/2} tu'_2(t)dt \right) + \dots$$

şeklinde ifade edilebilir.

$$u_0(x) = \cos x - \frac{x^4}{4!},$$

$$u_1(x) = -\frac{x^4}{4!} \int_0^{\pi/2} t \left(-\sin t - \frac{t^3}{3!} \right) dt = \frac{x^4}{4!} + \frac{\pi^5}{(5!)(3!)32} x^4.$$

$u_0(x)$ ve $u_1(x)$ bileşenleri düşünülürse $\frac{x^4}{4!}$ teriminin ters işaretli olduğu gözlemlenir.

Böylece, gürültü terimi (noise term) olgusuna göre $u(x) = \cos x$ tam çözümdür ve kolayca doğruluğu sağlanabilir.

SONUÇ VE ÖNERİLER

Adomian ayrışım metodu, fizik, kimya, biyoloji ve mühendislik gibi temel bilimlerin geniş bir kısmı için doğada var olan problemlere uygulanarak hızlı yakınsaklığı ve hassas çözümler sağlaması nedeniyle tercih edilen bir yöntemdir.

Bu çalışmada, Adomian ayrışım metodu analiz edilerek bazı sayısal metotlar ile karşılaştırması yapılmış ve metodun üstünlükleri örneklerle desteklenmiştir. Standart Adomian ayrıştırma metodu ile Modifiye Adomian ayrıştırma metodu aynı örneklere uygulanarak çözüme kaç iterasyonla ulaşıldığı hakkında yorum yapılmıştır. Metot; adi ve kısmi diferensiyel denklemler, integral ve integro-diferensiyel denklemlere uygulanarak problemlerin analitik çözümlerine ulaşılmıştır. Aynı zamanda, lineer olmayan denklemlerde bile lineerleştirme, pertürbasyon tekniği uygulaması, değişkenlerine ayırma gibi herhangi bir dönüşüme gerek kalmadan sonuca kolayca ulaşması araştırmacıları Adomian ayrıştırma metodunu kullanmaya iten sebeplerdendir. Bütün bunlara ek olarak, ayrıştırma metodunun verimli olması, birkaç yinelemeyle güvenilir sonuçlar üretmesi ve zorlukları en aza indirerek kolayca kullanılması sebebiyle, lineer olmayan problemlerin lineer problemler gibi basit usulde ele alınmasını sağlar.

Sonuç olarak, çözülen örneklerde Adomian ayrışım metodu ile sadece birkaç ayrıştırma serisi hesaplanarak problemin analitik veya yaklaşık çözümüne ulaşıldığı görülmüştür.

KAYNAKLAR

- [1] Adomian, G., (1994). Solving Frontier Problems of Physics: The Decomposition Method, Boston.
- [2] Adomian G., (1983). Stochastic Systems: The Decomposition Method, Academic Press, London.
- [3] Wazwaz, A.M., (2002). Partial Diffential Equations Method and Applications, A.A.Belkema Publishers, Tokyo.
- [4] Cherruault, Y., (1990). "Convergence of Adomian's Method", Kybernotes, 18(20): 31-38.
- [5] Cherruault, Y., Saccomandi, G. ve Some, B. (1992). "New Results for Convergence of Adomian's Method Applied to Integral Equations", Mathl. Comput. Modelling, 16(2): 85-93.
- [6] Cherruault, Y. ve Adomian, G., (1993). "Decomposition Methods: A New Proof of Convergence", Math. Comput. Modelling, 18: 103-106.
- [7] Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (1994). "Convergence of Adomian's Method Applied to Differential Equations", Computers Math. Applic., 28(5): 103-109.
- [8] Bellomo, N. ve Monaco, R., (1985). "A Comparison Between Adomian's Decomposition Methods and Perturbation Techniques for Nonlinear Random Differential Equations", Journal of Mathl. Anal. and Applic., 110: 495-502.
- [9] Rach, R.,(1987). "On the Adomian Decomposition Method and Comparisons with Picards Method", J. Math. Anal. and Applic. 128: 480-483.
- [10] Wazwaz, A. M., (2001). "A computational Approach to Soliton Solutions of the Kadomtsev-Petviashvili Equation", Appl. Math. and Comput.,123(2): 205-217.
- [11] Adomian, G., (1984). " A New Approach to Nonlinear Partial Diferantial Equations", J. Mathematical Analysis and Applications, 102: 420-434.
- [12] Adomian, G., (1986). Nonlinear Stochastic Operator Equations, Academic Press, San Diego.
- [13] Adomian, G., (1994). Solving Frontier Problems of Physics, the Decomposition Method, Kluwer, Boston.

- [14] Bellomo, N. ve Monaco, R., (1985). "A Comparison Between Adomian's Decomposition Methods and Perturbation Techniques for Nonlinear Random Differential Equations", *Journal of Mathl. Anal. and Applic.*, 110: 495-502.
- [15] Datta, B.K., (1989). "A New Approach to the Wave Equation-an Application of the Decomposition Method", *Journal of Mathl. Anal. and Applic.*, 142: 6-12.
- [16] Datta, B.K., (1993). *Introduction to Partial Differential Equations*, New Central Book Agency., Calcutta.
- [17] Rach, R., Baghdasarian A. and Adomian, G., (1992). "Differential Equations With Singular Coefficients", *Appl. Math. Lett.*, 47(2/3): 179-184.
- [18] Shawagfeh, N. T. and Adomian, G., (1993). "Nonperturbative Approximate Solution for Lane-Emden Equation", *J. Math. Phys.*, 34(9): 4364-4369.
- [19] Wazwaz, A.M., (2001). "A New Algorithm for Solving Differential Equations of the Lane-Emden Type", *Appl. Math. Comput.*, 118(2/3): 287-310.
- [20] Casasus, L. and Al-Hayani, W., (2001). "The Decomposition Method for Ordinary Differential Equations With Discontinuities", *Appl. Math. Comput.*, to appear.
- [21] Wazwaz, Abdul- Majid., (2000). "The Decomposition Method Applied to Systems of Partial Differential Equations and to the Reaction- Diffusion Brusselator Model", *Appl. Math. Comput.* 110: 251- 264.
- [22] Evans, J. David, Ergüt, M. ve Bulut, H., (2003). "The Numerical Solution of Multidimensional Partial Differential Equations by the Decomposition Method", *International Journal of Computer Mathematics*, 80(9): 1189-1198.
- [23] Evans, D. J. ve Rahmad, A. R., (1986). "The Numerical Solution of Multidimensional Partial Differential Equation by the Explicit Alternating Direction Method", *Inter. J. Computer Math.*, 23(1-2): 105-111.
- [24] Inc, M., Evans, D. J., (2003). "The Decomposition Method for Solving of a Class of Singular Two-Point Boundary Value Problems", *Intern. J. Computer Math.*, 80(7):869-882.
- [25] Kaya, Doğan. and El- Sayed, Salah M., (2003). "Numerical Soliton- Like Solutions of the Potential Kadomtsev- Petviashvili Equation by the Decomposition Method", *Physics Letters A* 320: 192-199.
- [26] Yan, Zhenya, (2005)., "Approximate Jacobi Elliptic Function Solutions of the Modified KdV Equation via the Decomposition Method", *Applied Mathematics and Computation*, 166: 571-583.
- [27] Kaya, D., (2004). "An Application of the Decomposition Method for the Two-Dimensional KdV- Burgers Equation", *Comput. and Math. With Appl.* 48: 1659-1665.
- [28] Wazwaz, Abdul- Majid., (2005). "Adomian Decomposition Method for a Reliable Treatment of the Bratu- Type Equations", *Appl. Math. Comput.* 166: 652- 663.
- [29] Al-Khaled, Kamel, (2005). "Numerical Approximations for Population Growth Models", *Applied Mathematics and Computational*, 160: 865-873.

- [30] Wazwaz, Abdul- Majid., (2005). "Analytical Solution for the Time- Dependent Emden- Fowler Type of Equations by Adomian Decomposition Method", Appl. Math. Comput. 166: 638-651.
- [31] Wazwaz, Abdul- Majid., (2001). "A New Method for Solving Differential Equations of the Lane- Emden Type", Appl. Math. Comput. 118 (2/3): 287- 310.
- [32] Adomian, G., Rach, R. ve Shawagfeh, N.T., (1995). "On the Analytic Solution of Lane- Emden Equation", Found. Phys. Lett. 8 (2): 161- 181.
- [33] Wang, Qi., (2006). "An Application of the Modified Adomian Decomposition Method for (N+1)- Dimensional Sine- Gordon Field", Applied Mathematics and Computation 181: 147- 152.
- [34] Polat, Necat., Kaya, Doğan. ve Tutalar, H.İlhan., (2006). "A Analytic and Numerical Solution to a Modified Kawahara Equation and a Convergence Analysis of the Method", Appl. Math. Comput. 179: 466- 472.
- [35] Sirendaoreji, (2004). "New Exact Travelling Wave Solutions for the Kawahara Equations", Chaos, Solitons Fract. 19: 147- 150.
- [36] Kawahara, T., (1972). "Oscillatory Solitary Waves in Dispersive Media", J. Phys. Soc. Jpn. 33: 260- 264.
- [37] Gu, Huifeng., Li, Zhi-bin., (2007). "A Modified Adomian Method for System of Nonlinear Differential Equations", Appl. Math. Comput. 187: 748- 755.
- [38] Babolian, K., Javadi, Sh., (2004). "New Method for Calculating Adomian polynomials", Appl. Math. Comput. 153: 253- 259.
- [39] Mestrovic, Mladen., (2007). "The Modified Decomposition Method for Eighth-Order Boundary Value Problems", Appl. Math. Comput. 188: 1437- 1444.
- [40] Wazwaz, A.M., (1999). "A Reliable Modification of Adomian's Decomposition Method", Appl. Math. Comput. 102: 77- 86.
- [41] Wazwaz, A.M., (2001). "The Numerical Solution of Sixth-Order Boundary Value Problems by Modified Decomposition Method", Appl. Math. Comput. 118: 311- 325.
- [42] Darvishi, M.T., Barati, A., (2007). "Super Cubic Iterative Methods to Solve Systems of Nonlinear Equations", Appl. Math. Comput. 118: 1678- 1685.
- [43] Abbasbandy, S., Tan, Y. ve Liao, S. J. (2007). "Newton-homotopy Analysis Method for Nonlinear Equations", Appl. Math. Comput. 188: 1794- 1800.
- [44] He, J. H., (1999). "Homotpy Perturbation Method", Comp. Math. Appl. Mech. Eng. 178: 257- 262.
- [45] Dehghan, Mehdi., Hamidi, Asgar. ve Shakourifar, Mohammad., (2007). "The Solution of Coupled Burgers' Equations Using Adomian- Pade Technique", Appl. Math. Comput. 189: 1034- 1047.
- [46] Dehghan, M., (2004). "Application of the Adomian Decomposition Method for Two-Dimensional Parabolic Equation Subject to Nonstandard Boundary Specifications", Appl. Math. Comput. 157 (2): 549- 560.

- [47] Dehghan, M., (2004). "The Use of Adomian Decomposition Method for Solving the One-Dimensional Parabolic Equation with Non-Local Boundary Specifications", *Int. J. Comput. Math.* 81: 25- 34.
- [48] Hajji, M.A. ve Al-Khaled, Kamel., (2008). "Numerical Methods for Nonlinear Fourth-Order Boundary Value Problems With Applications", *Int. J. Comput. Math.*, 83-104.
- [49] Smith, R.C., Bogar, G.A., Bolwers, K.L. ve Lund, J., (1991). "The Sinc-Galerkin Method for Fourth-Order Differential Equations", *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 28: 760- 788.
- [50] Lund, J. ve Bowers, K.L., (1992). *Sinc Methods for Quadrature and Differential Equations*, (Philadelphia: SIAM).
- [51] Layeni, O.P., (2008). "Remark on Modifications of Adomian Decomposition Method", *Appl. Math. Comput.* 197: 167- 171.
- [52] Hosseini, M.M., (2006). "Adomian Decomposition Method With Chebyshev Polynomials", *Appl. Math. Comput.* 175: 1685- 1693.
- [53] Gorguis, Alice., Chan, Wai Kit Benny., (2008). "Heat Equation and its Comparative Solutions", *Comput. Math. Appl.* 55: 2973- 2980.
- [54] Prof. Doutor Francisco Jose Lage Campelo Calheiros, Prof. Doutor Viriato Sérgio de Almeida Semiao, (2006). *Adomian Decomposition Method, Nonlinear Equations and Spectral Solutions of Burgers Equation*, Porto.
- [55] Adomian, G., "A New Approach to Nonlinear Partial Differential Equations", *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 102: 420–434.
- [56] Adomian, G., (1997). "Explicit Solutions of Nonlinear Partial Differential Equations", *Applied Mathematics and Computation*, 88: 117–126, 1997.
- [57] Cherruault, Y., Adomian, G., Abbaoui, K. ve Rach, R., (1995). "Further Remarks on Convergence of Decomposition Method", *International Journal of Bio-Medical Computing*, 38: 89–93.
- [58] Cherruault, Y. ve Adomian, G., (1993). "Decomposition Method: A New Proof of Convergence", *Mathematical and Computer Modelling*, 18(12): 103–106.
- [59] Abbaoui, K. ve Cherruault, K., (1995). "New Ideas for Proving Convergence of Decomposition Methods". *Computers and Mathematics with Applications*, 29(7): 103–108.
- [60] Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (1999). "The Decomposition Method Applied to the Cauchy Problem", *Kybernetes*, 28(1): 68–74.
- [61] Abbaoui, K., Cherruault, Y. ve Seng, V., (1995). "Practical Formulae for the Calculus of Multivariable Adomian Polynomials", *Mathematical and Computer Modelling*, 22(1): 89–93.
- [62] Wazwaz, A. M., (2009). *Partial Differential Equations and Solitary Wave Theory*, Saint Xavier University.
- [63] Cherruault, Y., (1989). "Convergence of Adomian's Method", *Kybernetes*, 18(2): 31-38.

- [64] Mavoungou, T., Cherruault, Y., (1994). "Numerical Study of Fisher's Equation by Adomian's Method", *Mathematical and Computer Modelling*, 19(1): 89-95.
- [65] Mavoungou, T., Cherruault, Y., (1992). "Convergence of Adomian's Method and Applications to Nonlinear Partial Differential Equations", *Kybernetes*, 21(6): 13-25.
- [66] Abbaoui, K., Pujol, M. J., Cherruault, Y., Himoun, N. ve Grimalt, P., (2001). "A New Formulation of Adomian Method", *Kybernetes*, 30: 1183-1191.
- [67] Himoun, N., Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (2003). "New Results on Adomian Method", *Kybernetes*, 32(4): 523-539.
- [68] Ouedraogo, R. Z., Cherruault, Y. ve Abbaoui, K., (2000). "Convergence of Adomian's Method Applied to Algebraic Equations", *Kybernetes*, 29(9/10): 1298-1305.
- [69] Ngarhasta, N., Some, B., Abbaoui, K. ve Cherruault, Y., (2002). "New Numerical Study of Adomian Method Applied to a Diffusion Model", *Kybernetes*, 31(1): 61-75.
- [70] Pourdavish A., (2006). "A Reliable Symbolic Implementation Of Algorithm For Calculating Adomian Polynomials", *Appl. Math. And Comput.* 172: 545-550.
- [71] Zhu Y. ve diğerleri, (2005). "A New Algorithm For Calculating Adomian Polynomials", *Appl. Math. And Comput.* 169: 402-416.
- [72] Wazwaz, A. M., (1998). "A Reliable Modification of Adomian's Decomposition Method", *Appl. Math. and Comput.*, 92: 1-7.
- [73] Rahman, M., (2007). *Integral Equations and Their Applications*, With Prees Southampton, Boston.
- [74] Adomian, G., (1992). "A review of the decomposition method and some recent results for nonlinear equation", *Math. Comput. Modelling*, 13(7): 17-43.
- [75] Adomian, G., Rach R., (1992). "Noise terms in decomposition series solution", *Computers Math. Appl.*, 24(11): 61-64.
- [76] Cherruault, Y., Saccomandi, G. ve Some, B., (1993). "New results for convergence of Adomian's method applied to integral equations", *Mathl. Comput. Modelling* 16(2): 85-93.
- [77] Cherruault, Y., Adomian, G., (1993). "Decomposition methods: A new proof of Convergence", *Mathl. Comput. Modelling* 18(12): 103-106.
- [78] Rahman, M., (2000). *Mathematical Methods with Applications*, WIT Press: Southampton.
- [79] Rahman, M., (2005). *Applied Numerical Analysis*, WIT Press: Southampton, Boston.
- [80] Biazar, J., Gholamin, P., Hosseini, K., (2006). "Exact Solution of Poisson Equation by Using Variational Iteration and Adomian Decomposition Method", *Journal of Applied Mathematics*, 3(10).
- [81] Dyke, Van, (1964). *Perturbation Methods in Fluid Mechanics*, Academic Press, NewYork.
- [82] Abramowitz, M., Stegun, I.E., (1970). "Handbook of Mathematical Functions, U.S. Department of Commerce, National Bureau of Standards, Applied Mathematics Series-55.

ÖZGEÇMİŞ

KİŞİSEL BİLGİLER

Adı Soyadı : Hacer AKYOL
Doğum Tarihi ve Yeri : 16/08/1986, Yalova
Yabancı Dili : İngilizce
E-posta : haker_kyl_77@hotmail.com

ÖĞRENİM DURUMU

Derece	Alan	Okul/Üniversite	Mezuniyet Yılı
Lisans	Matematik (İng.)	Abant İzzet Baysal	2009
Lise	Fen Bilimleri/ İng.	Ş.O.A. Anadolu Lisesi	2004

İŞ TECRÜBESİ

Yıl	Firma/Kurum	Görevi
2009-2012	İhtiyaç Akademi	Matematik Öğretmeni